Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.5 Reelle Funktionen; Stetigkeit

5.15 (a) Es sei $f(x) = \sqrt{x^2 - 2} + \sqrt[3]{3x + 4}$ mit $f : [\sqrt{2}, \infty) \to \mathbb{R}$. **12/5/15/1**
Beweisen Sie, daß es ein $a \in [\sqrt{2}, \infty)$ gibt, so daß $f(a) = 7$.

(b) Beweisen Sie: Ist $f : [a, b] \to [a, b]$ stetig, dann gibt es ein $x \in [a, b]$, so daß $f(x) = x$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 5.15 (a) f ist stetig und $f(2) < 7 < f(8)$. Mit dem **12/5/15/2**
Zwischenwertsatz erhält man die
Behauptung.

(b) Für $f(a) = a$ oder $f(b) = b$ ist die Behauptung trivial.
Sei nun $f(a) > a$ (für $f(b) < b$ verläuft der Beweis analog) und M eine Menge, die wie folgt definiert ist:

$x \in M \iff x \in [a, b]$ und für jedes y mit $a \leq y \leq x$ ist $f(y) > y$.

Auf M wird der Satz von der oberen Grenze angewendet.

Lösung zu Aufgabe 5.15 **12/5/15/3**

(a) (Wir benutzen den Zwischenwertsatz.) Es ist

$$f(\sqrt{2}) = \sqrt[3]{3\sqrt{2} + 4} < \sqrt[3]{6 + 4} < 7.$$

Weiterhin ist

$$f(8) = \sqrt{62} + \sqrt[3]{28} > \sqrt{49} = 7.$$

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein a mit $\sqrt{2} < a < 8$, so daß $f(a) = 7$.

(b) Wenn $f(a) = a$ oder $f(b) = b$, dann gilt die Behauptung.
Es sei nun $f(a) \neq a$ und $f(b) \neq b$. Wegen $f : [a, b] \to [a, b]$ ist dann $f(a) > a$ und $f(b) < b$. Wir definieren eine Teilmenge M von $[a, b]$ wie folgt:

$$x \in M \iff x \in [a, b] \text{ und für jedes } y \text{ mit } a \leq y \leq x \text{ ist } f(y) > y.$$

Wegen $a \in M$ ist M nicht leer und offenbar durch b nach oben beschränkt. Nach dem Satz von der oberen Grenze existiert ein $c \in [a, b]$, so daß c kleinste obere Schranke von M ist.
Behauptung: $f(c) = c$.
Sei (x_n) eine Folge mit $x_n < c$ und $x_n \to c$.
(Gäbe es eine solche Folge nicht, so wäre $c = a$. Nach Definition von M existiert dann eine Folge (y_n) mit $a = c \leq y_n \leq b$, $y_n \to c$ und $f(y_n) \leq y_n$. Folglich ist $f(a) = \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) \leq \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, Widerspruch !)
Nach Voraussetzung ist $x_n < f(x_n)$ und somit

$$c = \lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c).$$

Offenbar ist dann $c < b$, denn $f(b) < b$.

Nach Definition von M gibt es für jedes $x > c$ ein y mit $c < y \leq x$, so daß $f(y) \leq y$. Wir bilden jetzt eine Folge (y_n) mit $c < y_n \leq b$, $y_n \to c$ und $f(y_n) \leq y_n$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(c) \leq \lim_{n\to\infty} y_n = c.$$

Insgesamt erhält man also $c \leq f(c) \leq c$ und somit $f(c) = c$.