

Kapitel 12

Aufgabensammlung

12.5 Reelle Funktionen; Stetigkeit

5.16 Unter Benutzung von $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ berechne man: 12/5/16/1

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x}$, $a \neq 0$, (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 7x}{x^2}$.

[Hinweis: $\cos 3x = \cos(5x - 2x)$, $\cos 7x = \cos(5x + 2x)$.]

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}$.

[Hinweis: Man führe eine neue Variable $y = \arctan x$ ein.]

Lösung zu Aufgabe 5.16

12/5/16/3

(a) Es ist $\frac{\sin ax}{x} = a \cdot \frac{\sin ax}{ax}$ und $x \rightarrow 0 \iff y := ax \rightarrow 0$. Folglich gilt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} a \cdot \frac{\sin ax}{ax} = a \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = a.$$

(b) (Falls das Additionstheorem $\cos u - \cos v = -2 \cdot \sin \frac{u+v}{2} \cdot \sin \frac{u-v}{2}$ schon zur Verfügung steht, kann auch dies zur Lösung der Aufgabe benutzt werden.)

Aufgrund des Hinweises ist

$$\begin{aligned} \frac{\cos 3x - \cos 7x}{x^2} &= \frac{1}{x^2} (\cos(5x - 2x) - \cos(5x + 2x)) \\ &= \frac{1}{x^2} (\cos 5x \cdot \cos 2x + \sin 5x \cdot \sin 2x - \cos 5x \cdot \cos 2x + \sin 5x \cdot \sin 2x) \\ &= \frac{2}{x^2} \cdot \sin 5x \cdot \sin 2x \\ &= 20 \cdot \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 20. \end{aligned}$$

Also $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 7x}{x^2} = 20$.

(c) Wir setzen $y := \arctan x$ und somit $x = \tan y$.

Es gilt $x \rightarrow 0 \iff \arctan x = y \rightarrow 0$. Dann ist

$$\frac{\arctan x}{x} = \frac{y}{\tan y} = \frac{y}{\sin y} \cdot \cos y.$$

Wegen $\frac{\sin y}{y} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 1$ ist auch $\frac{y}{\sin y} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 1$. Folglich gilt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} \cdot \cos y = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \cos y = 1.$$