Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.5 Reelle Funktionen; Stetigkeit

5.16 Unter Benutzung von $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ berechne man: **12/5/16/1**

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{x}$, $a \neq 0$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos 3x - \cos 7x}{x^2}$.

[Hinweis: $\cos 3x = \cos(5x - 2x)$, $\cos 7x = \cos(5x + 2x)$.]

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x}$.

[Hinweis: Man führe eine neue Variable $y = \arctan x$ ein.]

Lösungshinweis zu Aufgabe 5.16 (a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{x} = a.$ **12/5/16/2**

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos 3x - \cos 7x}{x^2} = 20.$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1.$

Lösung zu Aufgabe 5.16 **12/5/16/3**

(a) Es ist $\frac{\sin ax}{x} = a \cdot \frac{\sin ax}{ax}$ und $x \to 0 \iff y := ax \to 0$. Folglich gilt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{x} = \lim_{x\to 0} a \cdot \frac{\sin ax}{ax} = a \cdot \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = a.$$

(b) (Falls das Additionstheorem $\cos u - \cos v = -2 \cdot \sin \frac{u+v}{2} \cdot \sin \frac{u-v}{2}$ schon zur Verfügung steht, kann auch dies zur Lösung der Aufgabe benutzt werden.)

Aufgrund des Hinweises ist

$$\begin{aligned}
\frac{\cos 3x - \cos 7x}{x^2} &= \frac{1}{x^2}\big(\cos(5x - 2x) - \cos(5x + 2x)\big) \\
&= \frac{1}{x^2}(\cos 5x \cdot \cos 2x + \sin 5x \cdot \sin 2x - \cos 5x \cdot \cos 2x + \sin 5x \cdot \sin 2x) \\
&= \frac{2}{x^2} \cdot \sin 5x \cdot \sin 2x \\
&= 20 \cdot \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \xrightarrow[x\to 0]{} 20.
\end{aligned}$$

Also $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos 3x - \cos 7x}{x^2} = 20.$

(c) Wir setzen $y := \arctan x$ und somit $x = \tan y$.

Es gilt $x \to 0 \iff \arctan x = y \to 0$. Dann ist

$$\frac{\arctan x}{x} = \frac{y}{\tan y} = \frac{y}{\sin y} \cdot \cos y.$$

Wegen $\frac{\sin y}{y} \xrightarrow[y\to 0]{} 0$ ist auch $\frac{y}{\sin y} \xrightarrow[y\to 0]{} 0$. Folglich gilt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} \cdot \cos y = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} \cdot \lim_{y\to 0} \cos y = 1.$$