

Kapitel 12

Aufgabensammlung

12.5 Reelle Funktionen; Stetigkeit

5.17 Es sei f an der Stelle $a \in \mathbb{R}$ stetig, und es sei $f(a) > 0$. Zeigen Sie 12/5/17/1

- (a) mit Hilfe der Stetigkeitsdefinition,
- (b) mit Hilfe des Kriteriums von Satz 5.2:

Es existiert eine Umgebung U von a , so daß für alle $x \in U \cap D(f)$ gilt: $f(x) > 0$.

Lösung zu Aufgabe 5.17 Sei f in a stetig und $f(a) > 0$. 12/5/17/3

- (a) Es sei $\varepsilon := \frac{f(a)}{2}$. Aufgrund der Stetigkeit von f in a existiert ein $\delta > 0$, so daß für alle $x \in D(f)$:

$$\text{Wenn } |x - a| < \delta, \text{ so } |f(x) - f(a)| < \varepsilon = \frac{f(a)}{2}.$$

Damit gilt für alle $x \in U_\delta(a) \cap D(f)$:

$$f(a) - \varepsilon = \frac{f(a)}{2} < f(x) < f(a) + \varepsilon = \frac{3}{2}f(a);$$

also $f(x) > 0$.

- (b) Angenommen, für jede Umgebung U von a existiert ein $x \in U \cap D(f)$, so daß $f(x) \leq 0$. Wegen $f(a) > 0$ ist stets $x \neq a$. Folglich ist a ein Häufungspunkt der Menge dieser x . Aufgrund der Stetigkeit von f in a gilt: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Wegen $f(x) \leq 0$ ist somit auch $f(a) \leq 0$, $\nabla!$