Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.5 Reelle Funktionen; Stetigkeit

5.17 Es sei f an der Stelle $a \in \mathbb{R}$ stetig, und es sei $f(a) > 0$. Zeigen Sie **12/5/17/1**

(a) mit Hilfe der Stetigkeitsdefinition,

(b) mit Hilfe des Kriteriums von Satz 5.2:

Es existiert eine Umgebung U von a, so daß für alle $x \in U \cap D(f)$ gilt: $f(x) > 0$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 5.17 (a) Für $\varepsilon := \frac{f(a)}{2}$ existiert aufgrund der Stetigkeit **12/5/17/2**
von f ein $\delta > 0$, so daß

$|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Hieraus folgt die Behauptung.

(b) Indirekter Beweis.

Lösung zu Aufgabe 5.17 Sei f in a stetig und $f(a) > 0$. **12/5/17/3**

(a) Es sei $\varepsilon := \frac{f(a)}{2}$. Aufgrund der Stetigkeit von f in a existiert ein $\delta > 0$, so daß für alle $x \in D(f)$:

Wenn $|x - a| < \delta$, so $|f(x) - f(a)| < \varepsilon = \frac{f(a)}{2}$.

Damit gilt für alle $x \in U_\delta(a) \cap D(f)$:

$$f(a) - \varepsilon = \frac{f(a)}{2} < f(x) < f(a) + \varepsilon = \tfrac{3}{2} f(a);$$

also $f(x) > 0$.

(b) Angenommen, für jede Umgebung U von a existiert ein $x \in U \cap D(f)$, so daß $f(x) \leq 0$. Wegen $f(a) > 0$ ist stets $x \neq a$. Folglich ist a ein Häufungspunkt der Menge dieser x. Aufgrund der Stetigkeit von f in a gilt: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Wegen $f(x) \leq 0$ ist somit auch $f(a) \leq 0$, ↯!