Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.5 Reelle Funktionen; Stetigkeit

5.18 Es sei f in $[a, b]$ stetig, $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ und **12/5/18/1**
$M = \{x : x \in [a, b] \text{ und } f(x) > 0\}$.
Zeigen Sie:

(a) Es existiert $\sup M$.

(b) $a < \sup M < b$.

(c) $f(\sup(M)) = 0$.

Lösung zu Aufgabe 5.18 Die Teilmenge $M \subseteq [a, b]$ ist nicht leer, da $a \in M$; **12/5/18/3** weiterhin ist $b \notin M$. Nach Aufgabe 17 (a) existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß $x \in M$ für alle x mit $a \leq x < a + \varepsilon$ und $x \notin M$ für alle x mit $b - \varepsilon < x \leq b$.

Nach dem Satz von der oberen Grenze existiert $c := \sup M$.
Offenbar ist $a < a + \varepsilon \leq c \leq b - \varepsilon < b$. Dies beweist die Aufgabenteile (a) und (b).

(c) Nach Voraussetzung ist f an der Stelle c stetig.
Wegen $f(x) > 0$ für alle $x \in M$ gilt:

$$\lim_{\substack{x \to c \\ x < c}} f(x) = f(c) \geq 0.$$

Nach Definition von M existiert in jeder rechtsseitigen Umgebung $U_r(c) \setminus \{c\}$ ein x mit $f(x) \leq 0$. Daher gibt es eine Folge (x_n) mit $x_n > c$, $x_n \to c$ und $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(c) \leq 0$.
Insgesamt ist also $0 \leq f(x) \leq 0$ und damit $f(c) = 0$.