

## Kapitel 12

### Aufgabensammlung

#### 12.5 Reelle Funktionen; Stetigkeit

**5.18** Es sei  $f$  in  $[a, b]$  stetig,  $f(a) > 0$ ,  $f(b) < 0$  und  $M = \{x : x \in [a, b] \text{ und } f(x) > 0\}$ . 12/5/18/1

Zeigen Sie:

- (a) Es existiert  $\sup M$ .
- (b)  $a < \sup M < b$ .
- (c)  $f(\sup(M)) = 0$ .

**Lösungshinweis zu Aufgabe 5.18** Man benutze Aufgabe 17 (a) und den Satz von der oberen Grenze. 12/5/18/2

**Lösung zu Aufgabe 5.18** Die Teilmenge  $M \subseteq [a, b]$  ist nicht leer, da  $a \in M$ ; weiterhin ist  $b \notin M$ . Nach Aufgabe 17 (a) existiert ein  $\varepsilon > 0$ , so daß  $x \in M$  für alle  $x$  mit  $a \leq x < a + \varepsilon$  und  $x \notin M$  für alle  $x$  mit  $b - \varepsilon < x \leq b$ . 12/5/18/3

Nach dem Satz von der oberen Grenze existiert  $c := \sup M$ .

Offenbar ist  $a < a + \varepsilon \leq c \leq b - \varepsilon < b$ . Dies beweist die Aufgabenteile (a) und (b).

(c) Nach Voraussetzung ist  $f$  an der Stelle  $c$  stetig.

Wegen  $f(x) > 0$  für alle  $x \in M$  gilt:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x < c}} f(x) = f(c) \geq 0.$$

Nach Definition von  $M$  existiert in jeder rechtsseitigen Umgebung  $U_r(c) \setminus \{c\}$  ein  $x$  mit  $f(x) \leq 0$ . Daher gibt es eine Folge  $(x_n)$  mit  $x_n > c$ ,  $x_n \rightarrow c$  und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(c) \leq 0.$$

Insgesamt ist also  $0 \leq f(x) \leq 0$  und damit  $f(c) = 0$ .