

Kapitel 12 Aufgabensammlung

12.5 Reelle Funktionen; Stetigkeit

5.20 Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

12/5/20/1

(a) $2^{3^x} = 3^{4^x}$,

(b) $2(\log_5 x)^2 + \log_5(x^3) - 2 = 0$,

(c) $15^x + 9^x = 25^x$ [Hinweis: Man dividiere durch 25^x .]

Lösung zu Aufgabe 5.20

12/5/20/3

(a) Da \ln injektiv ist, gilt:

$$\begin{aligned} 2^{3^x} = 3^{4^x} &\iff 3^x \ln 2 = 4^x \ln 3 \\ &\iff \left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{\ln 3}{\ln 2} \\ &\iff x \cdot \ln \frac{3}{4} = \ln \left(\frac{\ln 3}{\ln 2}\right) \\ &\iff x = \frac{\ln\left(\frac{\ln 3}{\ln 2}\right)}{\ln \frac{3}{4}} \approx -1,6009. \end{aligned}$$

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned} 2(\log_5 x)^2 + \log_5(x^3) - 2 = 0 &\iff (\log_5 x)^2 + \frac{3}{2} \cdot \log_5 x - 1 = 0 \\ &\iff \log_5 x = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16}} \\ &\iff \log_5 x = \frac{1}{2} \text{ oder } \log_5 x = -2. \end{aligned}$$

Folglich ist $x = 5^{\frac{1}{2}}$ oder $x = 5^{-2}$ und somit $\{\sqrt{5}, \frac{1}{25}\}$ die Lösungsmenge.

(c) Es gilt:

$$\begin{aligned} 15^x + 9^x = 25^x &\iff 9^x + 15^x - 25^x = 0 \\ &\iff \left(\frac{3}{5}\right)^{2x} + \left(\frac{3}{5}\right)^x - 1 = 0 \\ &\iff \left(\frac{3}{5}\right)^x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Wegen $\left(\frac{3}{5}\right)^x > 0$ ist $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ keine Lösung; also

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \text{ und somit } x = \frac{\ln \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)}{\ln \frac{3}{5}}.$$