Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.5 Reelle Funktionen; Stetigkeit

5.20 Lösen Sie die folgenden Gleichungen: **12/5/20/1**

(a) $2^{3^x} = 3^{4^x}$,

(b) $2(\log_5 x)^2 + \log_5(x^3) - 2 = 0$,

(c) $15^x + 9^x = 25^x$ [Hinweis: Man dividiere durch 25^x.]

Lösungshinweis zu Aufgabe 5.20 (a) Durch Anwendung des Logarithmus (auf beiden Seiten der Gleichung) erhält **12/5/20/2**

man schließlich $x = \dfrac{\ln\left(\frac{\ln 3}{\ln 2}\right)}{\ln \frac{3}{4}} \approx -1,6009.$

(b) Durch die Substitution $y := \log_5 x$ erhält man eine quadratische Gleichung; als Lösungsmenge ergibt sich $\{\sqrt{5}, \frac{1}{25}\}$.

(c) Es entsteht eine quadratische Gleichung in $\left(\frac{3}{5}\right)^x$;

als Lösungsmenge ergibt sich $x = \dfrac{\ln \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)}{\ln \frac{3}{5}}$.

Lösung zu Aufgabe 5.20 **12/5/20/3**

(a) Da $\ln$ injektiv ist, gilt:

$$\begin{aligned} 2^{3^x} = 3^{4^x} &\iff 3^x \ln 2 = 4^x \ln 3 \\ &\iff \left(\tfrac{3}{4}\right)^x = \frac{\ln 3}{\ln 2} \\ &\iff x \cdot \ln \tfrac{3}{4} = \ln\left(\frac{\ln 3}{\ln 2}\right) \\ &\iff x = \frac{\ln(\frac{\ln 3}{\ln 2})}{\ln \frac{3}{4}} \approx -1,6009. \end{aligned}$$

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned} 2(\log_5 x)^2 + \log_5(x^3) - 2 = 0 &\iff (\log_5 x)^2 + \tfrac{3}{2} \cdot \log_5 x - 1 = 0 \\ &\iff \log_5 x = -\tfrac{3}{4} \pm \sqrt{\tfrac{25}{16}} \\ &\iff \log_5 x = \tfrac{1}{2} \text{ oder } \log_5 x = -2. \end{aligned}$$

Folglich ist $x = 5^{\frac{1}{2}}$ oder $x = 5^{-2}$ und somit $\{\sqrt{5}, \frac{1}{25}\}$ die Lösungsmenge.

(c) Es gilt:

$$\begin{aligned} 15^x + 9^x = 25^x &\iff 9^x + 15^x - 25^x = 0 \\ &\iff \left(\tfrac{3}{5}\right)^{2x} + \left(\tfrac{3}{5}\right)^x - 1 = 0 \\ &\iff \left(\tfrac{3}{5}\right)^x = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} + 1} = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Wegen $\left(\frac{3}{5}\right)^x > 0$ ist $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ keine Lösung; also

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) \quad \text{und somit} \quad x = \frac{\ln \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)}{\ln \frac{3}{5}}.$$