Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.6 Der n-dimensionale ... Raum ...

6.1 Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit an der Stelle $(0,0)$, wobei: **12/6/1/1**

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Lösungshinweis zu Aufgabe 6.1 (a) Für eine Nullfolge (x_i, x_i) mit $x_i \neq 0$ ist $f(x_i, x_i) = \frac{1}{2} \neq f(0,0)$. **12/6/1/2**

Damit ist f in $(0,0)$ nicht stetig.

(b) Für $|x|, |y| \leq 1$ ist $x^2 \cdot y^2 \leq x^2 \leq x^2 + y^2$ und somit $\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leq 1$.

Daraus folgt die Stetigkeit von f in $(0,0)$.

Lösung zu Aufgabe 6.1 **12/6/1/3**

(a) Wir betrachten eine Folge (x_i) mit $x_i \in \mathbb{R}$, $x_i \neq 0$ und $x_i \to 0$.
Dann ist durch $\overline{x}_i = (x_i, x_i)$ eine Nullfolge in $\mathbb{R}^2$ definiert, und es ist
$f(x_i, x_i) = \dfrac{x_i^2}{2x_i^2} = \dfrac{1}{2}$ für jedes i. Es gilt also **nicht** $f(x_i, x_i) \xrightarrow[i\to\infty]{} f(0,0) = 0$.
Folglich ist f in $(0,0)$ unstetig.

(b) Es ist $\dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2} = xy \cdot \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} := (\star)$.
1. Fall: $(x = 0$ und $y \neq 0)$ oder $(x \neq 0$ und $y = 0)$.
Dann ist $(\star) = 0$.
2. Fall: $x \neq 0$ und $y \neq 0$. Es sei o.B.d.A. $|x|, |y| \leq 1$.
Dann ist $y^2 \leq 1$ und somit $x^2y^2 \leq x^2 \leq x^2 + y^2$, also $\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leq 1$.
Folglich gilt für beide Fälle: $\lim\limits_{x,y\to 0} f(x,y) = 0 = f(0,0)$,
somit ist f in $(0,0)$ stetig.