Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.6 Der n-dimensionale ... Raum ...

6.3 Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie: **12/6/3/1**

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } x^2+y^2 \neq 0, \\ 1 & \text{für } x = y = 0 \end{cases}$

ist in $(0,0)$ nicht stetig.

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x}\sin(xy) & \text{für } x \neq 0, \\ y & \text{für } x = 0 \end{cases}$

ist in jedem Punkt $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ stetig.

[Man benutze die Ungleichung: $|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x|$ für „kleine“ x.]

Lösungshinweis zu Aufgabe 6.3 (a) Die Untersuchung des Grenzwertes für $x = 0,\ y \neq 0$ und $y \to 0$ liefert die **12/6/3/2**

Unstetigkeit von f in $(0,0)$.

(b) Mit dem Hinweis und einer geeigneten Fallunterscheidung für a, b ist der Beweis leicht zu führen.

Lösung zu Aufgabe 6.3 **12/6/3/3**

(a) Für $x = 0$ und $y \neq 0$ ist $f(x,y) = f(0,y) = 0$ und somit
$f(0,y) \xrightarrow[y\to 0]{} 0 \neq 1 = f(0,0)$. Folglich ist f in $(0,0)$ unstetig.

(b) Es gelte: $x_i \to a$ und $y_i \to b$. Wir nehmen folgende Fallunterscheidung vor:

(α) $a \neq 0$ (o.B.d.A. $x \neq 0$) und $b = 0$; also $x_i y_i \to 0$, d.h., $x_i y_i$ ist „klein“.
Dann gilt:

$$|f(x_i,y_i)| = \left|\frac{1}{x_i}\cdot\sin(x_i y_i)\right| \leq \left|\frac{1}{x_i}\right|\cdot|x_i y_i| = |y_i| \xrightarrow[i\to\infty]{} 0 = b = |f(a,0)|.$$

Folglich ist f in $(a,0)$ stetig.

(β) $a \neq 0$ und $b \neq 0$. Da rationale Funktionen und die Sinusfunktion stetig sind und rationale Operationen von stetigen zu stetigen Funktionen führen, ist f in (a,b) stetig.

(γ) $a = 0$ und $b \neq 0$.
Für $x_i = 0$ ist $f(x_i,y_i) = y_i$; für $x_i \neq 0$ ist o.B.d.A. $x_i y_i$ „klein“ und $y_i \neq 0$.
Folglich gilt: $|f(x_i,y_i)| \leq |y_i|$ (nach Teil α) und

$$\begin{aligned} |f(x_i,y_i)| &= |y_i|\cdot\frac{1}{|x_i y_i|}\cdot|\sin(x_i y_i)| \\ &\geq |y_i|\cdot\left|\frac{1}{\tan(x_i y_i)}\right|\cdot|\sin(x_i y_i)| = |y_i|\cdot|\cos(x_i y_i)|. \end{aligned}$$

Insgesamt gilt also: $|y_i|\cdot|\cos(x_i y_i)| \leq |f(x_i,y_i)| \leq |y_i|$.
Wegen $\cos(x_i, y_i) \xrightarrow[i\to\infty]{} 1$ erhält man $\lim\limits_{i\to\infty} f(x_i,y_i) = b = f(0,b)$.
Folglich ist f in $(0,b)$ stetig.