Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.6 Der n-dimensionale ... Raum ...

6.4 Es sei f die durch $f(x,y) = x^y$ definierte Funktion, deren Definitionsbereich die Halbebene $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ ist. **12/6/4/1**
Zeigen Sie, daß f stetig ist, und untersuchen Sie diese Funktion auf Existenz und Größe von Grenzwerten in den Randpunkten des Definitionsbereiches.

[Hinweis: Definition von x^y beachten!]

Lösungshinweis zu Aufgabe 6.4 Aus $f(x,y) = \mathrm{e}^{y \cdot \ln x}$ ergibt sich die Stetigkeit von f. **12/6/4/2**

f besitzt in $(0,0)$ keinen Grenzwert.
f besitzt an den Stellen $(0,b)$ mit $b > 0$ den Grenzwert 0 und
an den Stellen $(0,b)$ mit $b < 0$ den uneigentlichen Grenzwert ∞.

Lösung zu Aufgabe 6.4 Für $x > 0$ und y beliebig ist $f(x,y) = x^y = \mathrm{e}^{y \cdot \ln x}$. **12/6/4/3**

Wir betrachten zunächst die Funktion $g(x,y) := y \cdot \ln x$.

Sei $(a,b) \in \mathrm{D}(f)$, also $a > 0,\ b \in \mathbb{R}$ beliebig und $x_i \to a$ und $y_i \to b$ (o.B.d.A. $x_i > 0$ für alle i). Dann ist offenbar: $\lim\limits_{i\to\infty} = b \cdot \ln a$ und wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion auch $\lim\limits_{i\to\infty} f(x_i, y_i) = \mathrm{e}^{b \cdot \ln a} = a^b = f(a,b)$.

Folglich ist f in (a,b) stetig.

Wir untersuchen jetzt die Grenzwerte in den Randpunkten des Definitionsbereiches, also in den Punkten $(0,b)$, $b \in \mathbb{R}$ beliebig.

1. Fall: $b = 0$.
Sei $x_i \to a$, $x_i > 0$ und $y_i \to 0$, speziell $y_i := 0$. Dann ist $y_i \cdot \ln x_i = 0$, also $f(x_i, y_i) = \mathrm{e}^0 = 1$ für alle i.

Sei jetzt $y_i := \frac{1}{\ln x_i}$ $(\to 0)$. Dann ist $y_i \cdot \ln x_i = 1$ und somit $f(x_i, y_i) = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.

Folglich besitzt f in $(0,0)$ keinen Grenzwert.

2. Fall: $b > 0$, $y_i \to b$ und o.B.d.A. $y_i > 0$.

Dann ist $y_i \cdot \ln x_i \xrightarrow[i\to\infty]{} -\infty$, also $f(x_i, y_i) = \mathrm{e}^{y_i \cdot \ln x_i} \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$, d.h.,
f besitzt an der Stelle $(0,b)$ mit $b > 0$ den Grenzwert 0.

3. Fall: $b < 0$, $y_i \to b$ und o.B.d.A. $y_i < 0$.

Dann ist $y_i \cdot \ln x_i \xrightarrow[i\to\infty]{} \infty$, also $f(x_i, y_i) = \mathrm{e}^{y_i \cdot \ln x_i} \xrightarrow[i\to\infty]{} \infty$.

f besitzt in $(0,b)$ für $b < 0$ den uneigentlichen Grenzwert ∞.