Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.6 Der n-dimensionale ... Raum ...

6.5 Es sei M die Menge aller Folgen $t = (t_0, t_1, t_2, \ldots)$ aus Nullen und Einsen. **12/6/5/1**
Für $s = (s_0, s_1, s_2, \ldots)$ und $t = (t_0, t_1, t_2, \ldots)$ aus M sei

$$\varrho(s,t) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}\,. \qquad (\star)$$

Die Abbildung $f : M \to M$ sei definiert durch $f\Big((t_0, t_1, t_2, \ldots)\Big) = (t_1, t_2, t_3, \ldots)$.

(a) Zeigen Sie, daß die Reihe $(\star)$ konvergiert und ϱ eine Metrik auf M ist.

(b) Berechnen Sie den Abstand von $s = (0,0,0,\ldots)$ und $t = (0,1,0,1,\ldots)$.

(c) Zeigen Sie
   i. Wenn $s_i = t_i$ für $i = 0, \ldots, n$, so $\varrho(s,t) \le \frac{1}{2^n}$.
   ii. Wenn $n \ge 1$ und $\varrho(s,t) \le \frac{1}{2^n}$, so $s_i = t_i$ für $i = 0, \ldots, n-1$.

(d) Untersuchen Sie, ob die Abbildung f stetig ist.

Lösungshinweis zu Aufgabe 6.5 (a) $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ ist eine konvergente Majorante von $\varrho(s,t)$. **12/6/5/2**

Die Eigenschaften der Metrik sind leicht nachzuweisen.

(b) $\varrho(s,t) = \frac{2}{3}$.

(c) Eigenschaft i) ist trivial; ii) zeigt man leicht indirekt.

(d) Für $\varepsilon > 0$ und $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ und $\delta := \frac{1}{2^{n+1}}$ gilt stets:
$\varrho(s,t) < \delta \implies \varrho(f(s), f(t)) < \varepsilon$.