Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.6 Der n-dimensionale ... Raum ...

6.5 Es sei M die Menge aller Folgen $t = (t_0, t_1, t_2, \ldots)$ aus Nullen und Einsen. **12/6/5/1**
Für $s = (s_0, s_1, s_2, \ldots)$ und $t = (t_0, t_1, t_2, \ldots)$ aus M sei

$$\varrho(s,t) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}\,. \qquad (\star)$$

Die Abbildung $f : M \to M$ sei definiert durch $f\Big((t_0, t_1, t_2, \ldots)\Big) = (t_1, t_2, t_3, \ldots)$.

(a) Zeigen Sie, daß die Reihe $(\star)$ konvergiert und ϱ eine Metrik auf M ist.

(b) Berechnen Sie den Abstand von $s = (0,0,0,\ldots)$ und $t = (0,1,0,1,\ldots)$.

(c) Zeigen Sie

i. Wenn $s_i = t_i$ für $i = 0,\ldots,n$, so $\varrho(s,t) \le \frac{1}{2^n}$.

ii. Wenn $n \ge 1$ und $\varrho(s,t) \le \frac{1}{2^n}$, so $s_i = t_i$ für $i = 0,\ldots,n-1$.

(d) Untersuchen Sie, ob die Abbildung f stetig ist.

Lösung zu Aufgabe 6.5 **12/6/5/3**

(a) Es ist $|s_i - t_i| = \begin{cases} 0, & \text{für } s_i = t_i, \\ 1, & \text{für } s_i \ne t_i, \end{cases}$ also $|s_i - t_i| \le 1$ für alle i.
Folglich ist $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ eine konvergente Majorante von $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}$.
Offenbar ist $\varrho(s,t) \ge 0$. Für $s = t$ ist stets $s_i = t_i$ und damit $\varrho(s,t) = 0$.
Für $s \ne t$ ist $s_i \ne t_i$ für wenigstens ein i; also $\varrho(s,t) > 0$.
$\varrho(s,t) = \varrho(t,s)$ ist trivial.
Es sei nun $u := (u_0, u_1, u_2, \ldots) \in M$.
Aufgrund der Dreiecksungleichung für reelle Zahlen gilt: $|s_i - t_i| \le |s_i - u_i| + |u_i - t_i|$ für alle i. Wegen $|s_i - u_i| + |u_i - t_i| \le 2$ ist $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - u_i| + |u_i - t_i|}{2^i}$ konvergent.
Folglich gilt:

$$\varrho(s,t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \le \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - u_i|}{2^i} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|u_i - t_i|}{2^i} = \varrho(s,u) + \varrho(u,t).$$

(b) Es ist $\varrho(s,t) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2i+1}} = \frac{1}{2} \cdot \sum\limits_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^i = \frac{2}{3}$.

(c) Wenn $s_i = t_i$ für $i = 0,\ldots,n$, so

$$\varrho(s,t) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_{i+n+1} - t_{i+n+1}|}{2^i} \le \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n}\,.$$

Angenommen, $s_k \ne t_k$ für ein $k \in \{0,\ldots,n-1\}$, dann ist $|s_k - t_k| = 1$ und somit $\varrho(s,t) \ge \frac{1}{2^k} \ge \frac{1}{2^{n-1}}$ im Widerspruch zu $\varrho(s,t) \le \frac{1}{2^n}$.

(d) Es sei $\varepsilon > 0$, n so groß, daß $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ und $\delta := \frac{1}{2^{n+1}}$.

Wenn $\varrho(s,t) < \frac{1}{2^{n+1}} = \delta$, so $s_i = t_i$ für $i = 1, \ldots, n+1$. Folglich ist
$$\varrho\Big(f(s), f(t)\Big) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_{i+1} - t_{i+1}|}{2^i} = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_{i+1} - t_{i+1}|}{2^i} \le \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$