

Kapitel 12 Aufgabensammlung

12.6 Der n-dimensionale ... Raum ...

6.5 Es sei M die Menge aller Folgen $t = (t_0, t_1, t_2, \dots)$ aus Nullen und Einsen. 12/6/5/1
Für $s = (s_0, s_1, s_2, \dots)$ und $t = (t_0, t_1, t_2, \dots)$ aus M sei

$$\varrho(s, t) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}. \quad (\star)$$

Die Abbildung $f : M \rightarrow M$ sei definiert durch $f((t_0, t_1, t_2, \dots)) = (t_1, t_2, t_3, \dots)$.

- (a) Zeigen Sie, daß die Reihe (\star) konvergiert und ϱ eine Metrik auf M ist.
- (b) Berechnen Sie den Abstand von $s = (0, 0, 0, \dots)$ und $t = (0, 1, 0, 1, \dots)$.
- (c) Zeigen Sie
 - i. Wenn $s_i = t_i$ für $i = 0, \dots, n$, so $\varrho(s, t) \leq \frac{1}{2^n}$.
 - ii. Wenn $n \geq 1$ und $\varrho(s, t) \leq \frac{1}{2^n}$, so $s_i = t_i$ für $i = 0, \dots, n - 1$.
- (d) Untersuchen Sie, ob die Abbildung f stetig ist.

Lösungshinweis zu Aufgabe 6.5 (a) $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ ist eine konvergente Majorante von 12/6/5/2

$\varrho(s, t)$.

Die Eigenschaften der Metrik sind leicht nachzuweisen.

- (b) $\varrho(s, t) = \frac{2}{3}$.
- (c) Eigenschaft i) ist trivial; ii) zeigt man leicht indirekt.
- (d) Für $\varepsilon > 0$ und $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ und $\delta := \frac{1}{2^{n+1}}$ gilt stets:
 $\varrho(s, t) < \delta \implies \varrho(f(s), f(t)) < \varepsilon$.

Lösung zu Aufgabe 6.5

12/6/5/3

- (a) Es ist $|s_i - t_i| = \begin{cases} 0, & \text{für } s_i = t_i, \\ 1, & \text{für } s_i \neq t_i, \end{cases}$ also $|s_i - t_i| \leq 1$ für alle i .

Folglich ist $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ eine konvergente Majorante von $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}$.

Offenbar ist $\varrho(s, t) \geq 0$. Für $s = t$ ist stets $s_i = t_i$ und damit $\varrho(s, t) = 0$.

Für $s \neq t$ ist $s_i \neq t_i$ für wenigstens ein i ; also $\varrho(s, t) > 0$.

$\varrho(s, t) = \varrho(t, s)$ ist trivial.

Es sei nun $u := (u_0, u_1, u_2, \dots) \in M$.

Aufgrund der Dreiecksungleichung für reelle Zahlen gilt: $|s_i - t_i| \leq |s_i - u_i| + |u_i - t_i|$

für alle i . Wegen $|s_i - u_i| + |u_i - t_i| \leq 2$ ist $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - u_i| + |u_i - t_i|}{2^i}$ konvergent.

Folglich gilt:

$$\varrho(s, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - u_i|}{2^i} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|u_i - t_i|}{2^i} = \varrho(s, u) + \varrho(u, t).$$

(b) Es ist $\varrho(s, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2i+1}} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^i = \frac{2}{3}$.

(c) Wenn $s_i = t_i$ für $i = 0, \dots, n$, so

$$\varrho(s, t) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_{i+n+1} - t_{i+n+1}|}{2^i} \leq \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n}.$$

Angenommen, $s_k \neq t_k$ für ein $k \in \{0, \dots, n-1\}$, dann ist $|s_k - t_k| = 1$ und somit $\varrho(s, t) \geq \frac{1}{2^k} \geq \frac{1}{2^{n-1}}$ im Widerspruch zu $\varrho(s, t) \leq \frac{1}{2^n}$.

(d) Es sei $\varepsilon > 0$, n so groß, daß $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ und $\delta := \frac{1}{2^{n+1}}$.

Wenn $\varrho(s, t) < \frac{1}{2^{n+1}} = \delta$, so $s_i = t_i$ für $i = 1, \dots, n+1$. Folglich ist

$$\varrho(f(s), f(t)) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_{i+1} - t_{i+1}|}{2^i} = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_{i+1} - t_{i+1}|}{2^i} \leq \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$