

Kapitel 12

Aufgabensammlung

12.6 Der n-dimensionale ... Raum ...

6.7 Zeigen Sie für $\bar{x} = (x, y)$ und $\bar{0} = (0, 0)$:

12/6/7/1

$$(a) \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{0}} \frac{2 - \sqrt{xy+4}}{xy} = -\frac{1}{4},$$

$$(b) \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{0}} \frac{\sin(xy)}{xy} = 1,$$

$$(c) \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{0}} \frac{\sin(xy)}{x} = 0.$$

[Für (b) und (c) benutze man die Ungleichung $|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x|$ für „kleine“ x .]

Lösung zu Aufgabe 6.7

12/6/7/3

(a) Es ist

$$\begin{aligned} \frac{2 - \sqrt{xy+4}}{xy} &= \frac{(2 - \sqrt{xy+4})(2 + \sqrt{xy+4})}{xy(2 + \sqrt{xy+4})} \\ &= \frac{-xy}{xy(2 + \sqrt{xy+4})} = \frac{-1}{2 + \sqrt{xy+4}} \xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \bar{0}} -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

(b) Es sei $x \cdot y \neq 0$ und $\bar{x} \rightarrow \bar{0}$, also $x \cdot y \rightarrow 0$ und somit ist $x \cdot y$ „klein“.
Nach dem Hinweis gilt:

$$\left| \frac{\sin(xy)}{xy} \right| \leq \left| \frac{xy}{xy} \right| = 1 \quad \text{und} \quad \left| \frac{\sin(xy)}{xy} \right| \geq \left| \frac{\sin(xy)}{\tan(xy)} \right| = \cos(xy).$$

Also $|\cos(xy)| \leq \left| \frac{\sin(xy)}{xy} \right| \leq 1$ und $\cos(xy) \xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \bar{0}} 1$, folglich ist $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{0}} \frac{\sin(xy)}{xy} = 1$.

(c) 1. Fall: $y = 0$. Dann ist $\sin(xy) = 0$, also $\frac{\sin(xy)}{x} \xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \bar{0}} 0$.

2. Fall: $y \neq 0$. Hierfür ist $\frac{\sin(xy)}{x} = y \cdot \frac{\sin(xy)}{xy} \xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \bar{0}} 0 \cdot 1 = 0$ (nach Aufgabe (b)).