Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.6 Der n-dimensionale ... Raum ...

6.7 Zeigen Sie für $\overline{x} = (x, y)$ und $\overline{0} = (0, 0)$: **12/6/7/1**

(a) $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{0}} \dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy} = -\frac{1}{4}$,

(b) $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{0}} \dfrac{\sin(xy)}{xy} = 1$,

(c) $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{0}} \dfrac{\sin(xy)}{x} = 0$.

[Für (b) und (c) benutze man die Ungleichung $|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x|$ für „kleine“ x.]

Lösungshinweis zu Aufgabe 6.7 (a) Der Bruch wird mit $2+\sqrt{xy+4}$ erweitert. **12/6/7/2**

(b) und (c) sind mit Hilfe des Hinweises leicht zu verifizieren.

Lösung zu Aufgabe 6.7 **12/6/7/3**

(a) Es ist

$$\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy} = \frac{(2-\sqrt{xy+4})(2+\sqrt{xy+4})}{xy(2+\sqrt{xy+4})}$$
$$= \frac{-xy}{xy(2+\sqrt{xy+4})} = \frac{-1}{2+\sqrt{xy+4}} \xrightarrow[\overline{x}\to\overline{0}]{} -\frac{1}{4}\,.$$

(b) Es sei $x\cdot y \neq 0$ und $\overline{x} \to \overline{0}$, also $x\cdot y \to 0$ und somit ist $x\cdot y$ „klein“.
Nach dem Hinweis gilt:

$$\left|\frac{\sin(xy)}{xy}\right| \leq \left|\frac{xy}{xy}\right| = 1 \quad \text{und} \quad \left|\frac{\sin(xy)}{xy}\right| \geq \left|\frac{\sin(xy)}{\tan(xy)}\right| = \cos(xy).$$

Also $|\cos(xy)| \leq \left|\dfrac{\sin(xy)}{xy}\right| \leq 1$ und $\cos(xy) \xrightarrow[\overline{x}\to\overline{0}]{} 1$, folglich ist $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{0}} \dfrac{\sin(xy)}{xy} = 1$.

(c) 1. Fall: $y = 0$. Dann ist $\sin(xy) = 0$, also $\dfrac{\sin(xy)}{x} \xrightarrow[\overline{x}\to\overline{0}]{} 0$.

2. Fall: $y \neq 0$. Hierfür ist $\dfrac{\sin(xy)}{x} = y\cdot\dfrac{\sin(xy)}{xy} \xrightarrow[\overline{x}\to\overline{0}]{} 0\cdot 1 = 1$ (nach Aufgabe (b)).