

## Kapitel 12

### Aufgabensammlung

#### 12.6 Der n-dimensionale ... Raum ...

- 6.11** Es sei  $(\mathbb{M}, \varrho)$  ein metrischer Raum und  $a \in \mathbb{M}$ . 12/6/11/1  
Zeigen Sie, daß die Funktion  $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \varrho(x, a)$  in  $\mathbb{M}$  stetig ist.  
Ist  $f$  in  $\mathbb{M}$  auch gleichmäßig stetig?

**Lösung zu Aufgabe 6.11** Für die Metrik in  $\mathbb{M}$  gilt: 12/6/11/3

$$\varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(z, y) \implies \varrho(x, y) - \varrho(x, z) \leq \varrho(z, y) = \varrho(y, z) \text{ und}$$

$$\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z) \implies \varrho(x, z) - \varrho(x, y) \leq \varrho(y, z).$$

Folglich gilt:  $|\varrho(x, y) - \varrho(x, z)| \leq \varrho(y, z)$ .

Dies wird benutzt, um die Stetigkeit von  $f$  in  $\mathbb{M}$  nachzuweisen.

Dazu sei  $b$  ein Element aus  $\mathbb{M}$  und  $\varepsilon > 0$ . Wir wählen  $\delta := \varepsilon$ .

Dann gilt: Wenn  $\varrho(x, b) < \delta$ , so

$$|f(x) - f(b)| = |\varrho(x, a) - \varrho(b, a)| = |\varrho(a, x) - \varrho(a, b)| \leq \varrho(x, b) < \delta = \varepsilon.$$

Folglich ist  $f$  in  $\mathbb{M}$  stetig.

Offenbar ist  $f$  in  $\mathbb{M}$  auch gleichmäßig stetig.

Denn für  $\varepsilon > 0$  und  $\delta := \varepsilon$  gilt für alle  $x, y \in \mathbb{M}$ : Wenn  $\varrho(x, y) < \delta$ , so

$$|f(x) - f(y)| = |\varrho(x, a) - \varrho(y, a)| = |\varrho(a, x) - \varrho(a, y)| \leq \varrho(x, y) < \delta = \varepsilon.$$