

Kapitel 12

Aufgabensammlung

12.6 Der n-dimensionale ... Raum ...

- 6.11** Es sei (\mathbb{M}, ϱ) ein metrischer Raum und $a \in \mathbb{M}$. 12/6/11/1
Zeigen Sie, daß die Funktion $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \varrho(x, a)$ in \mathbb{M} stetig ist.
Ist f in \mathbb{M} auch gleichmäßig stetig?

Lösungshinweis zu Aufgabe 6.11 Für $\varepsilon > 0$ leistet $\delta = \varepsilon$ das Verlangte. 12/6/11/2

Lösung zu Aufgabe 6.11 Für die Metrik in \mathbb{M} gilt: 12/6/11/3

$$\varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(z, y) \implies \varrho(x, y) - \varrho(x, z) \leq \varrho(z, y) = \varrho(y, z) \text{ und}$$

$$\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z) \implies \varrho(x, z) - \varrho(x, y) \leq \varrho(y, z).$$

Folglich gilt: $|\varrho(x, y) - \varrho(x, z)| \leq \varrho(y, z)$.

Dies wird benutzt, um die Stetigkeit von f in \mathbb{M} nachzuweisen.

Dazu sei b ein Element aus \mathbb{M} und $\varepsilon > 0$. Wir wählen $\delta := \varepsilon$.

Dann gilt: Wenn $\varrho(x, b) < \delta$, so

$$|f(x) - f(b)| = |\varrho(x, a) - \varrho(b, a)| = |\varrho(a, x) - \varrho(a, b)| \leq \varrho(x, b) < \delta = \varepsilon.$$

Folglich ist f in \mathbb{M} stetig.

Offenbar ist f in \mathbb{M} auch gleichmäßig stetig.

Denn für $\varepsilon > 0$ und $\delta := \varepsilon$ gilt für alle $x, y \in \mathbb{M}$: Wenn $\varrho(x, y) < \delta$, so

$$|f(x) - f(y)| = |\varrho(x, a) - \varrho(y, a)| = |\varrho(a, x) - \varrho(a, y)| \leq \varrho(x, y) < \delta = \varepsilon.$$