

Kapitel 12 Aufgabensammlung

12.6 Der n-dimensionale ... Raum ...

6.13 Welche der folgenden Mengen sind kompakt?

12/6/13/1

- (a) $A = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(n - \frac{3}{5}, n + \frac{3}{5} \right)$ in \mathbb{R} ,
- (b) $A = \{0\} \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \left[\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n} \right] \right)$ in \mathbb{R} ,
- (c) $A = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in [0, 1]\}$ in \mathbb{R}^2 ,
- (d) $A = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}\}$ in \mathbb{R}^2 ,
- (e) $A = \{(x_1, x_2) : x_2 \leq 2x_1 + 1\}$ in \mathbb{R}^2 .

Lösung zu Aufgabe 6.13 Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^k$ ist kompakt gdw A in \mathbb{R}^k beschränkt und abgeschlossen ist. 12/6/13/3

- (a) Offenbar ist A in \mathbb{R} nicht beschränkt und damit nicht kompakt.
- (b) Da A offensichtlich beschränkt ist, bleibt nur noch die Abgeschlossenheit nachzuweisen.
Sei a ein Häufungspunkt in A . Ist $a = 0$, so ist $a \in A$.
Sei nun $a \neq 0$ und (a_i) eine Folge in A mit $a_i \rightarrow a$. Wegen $a_i \in A$ ist $a_i \geq 0$, also o.B.d.A. $a_i > 0$.
Dann existiert ein n_0 , so daß $a > \frac{1}{2n_0}$. Folglich ist auch $a_i > \frac{1}{2n_0}$ für fast alle i
 $\implies a_i \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right] \cup \dots \cup \left[\frac{1}{2n_0+1}, \frac{1}{2n_0} \right] := A_{n_0}$.
 A_{n_0} ist eine endliche Vereinigung von abgeschlossenen Mengen, also selbst abgeschlossen. Folglich ist $a \in A_{n_0} \subseteq A$ und somit A abgeschlossen.
- (c) Offenbar ist A beschränkt in \mathbb{R}^2 .
Sei (a, b) ein Häufungspunkt in A und $((x_i, y_i))$ eine Folge in A mit $(x_i, y_i) \rightarrow (a, b)$. Wegen $x_i \rightarrow a$, $y_i \rightarrow b$ und $x_i, y_i \in [0, 1]$ sind auch $a, b \in [0, 1]$, also $(a, b) \in A$. Folglich ist A kompakt.
- (d) Es ist $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ und $\frac{\sqrt{2}}{2} \notin \mathbb{Q}$. Sei (x_i) eine Folge in $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ mit $x_i \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_i \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}$ und $y_i = x_i$. Dann ist $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ein Häufungspunkt von $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ und $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ein Häufungspunkt von $\{(x_i, y_i) : i \in \mathbb{N}\} \subseteq A$, der nicht zu A gehört. Folglich ist A nicht abgeschlossen und damit nicht kompakt.
- (e) A ist nicht beschränkt in \mathbb{R}^2 und daher nicht kompakt.