Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.6 Der n-dimensionale ... Raum ...

6.13 Welche der folgenden Mengen sind kompakt? **12/6/13/1**

(a) $A = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left(n-\frac{3}{5}, n+\frac{3}{5}\right)$ in $\mathbb{R}$,

(b) $A = \{0\} \cup \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \left[\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right]\Big)$ in $\mathbb{R}$,

(c) $A = \{(x_1,x_2) : x_1, x_2 \in [0,1]\}$ in $\mathbb{R}^2$,

(d) $A = \{(x_1,x_2) : x_1, x_2 \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\}$ in $\mathbb{R}^2$,

(e) $A = \{(x_1,x_2) : x_2 \leq 2x_1 + 1\}$ in $\mathbb{R}^2$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 6.13 Sei $A \subseteq \mathbb{R}^k$. A ist kompakt $\iff$ A ist beschränkt und abgeschlossen. **12/6/13/2**

(a) A ist nicht beschränkt.

(b) A ist beschränkt und abgeschlossen.

(c) A ist beschränkt und abgeschlossen.

(d) A ist nicht abgeschlossen.

(e) A ist nicht beschränkt.

Lösung zu Aufgabe 6.13 Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^k$ ist kompakt gdw A in $\mathbb{R}^k$ beschränkt und abgeschlossen ist. **12/6/13/3**

(a) Offenbar ist A in $\mathbb{R}$ nicht beschränkt und damit nicht kompakt.

(b) Da A offensichtlich beschränkt ist, bleibt nur noch die Abgeschlossenheit nachzuweisen.
Sei a ein Häufungspunkt in A. Ist $a = 0$, so ist $a \in A$.
Sei nun $a \neq 0$ und (a_i) eine Folge in A mit $a_i \to a$. Wegen $a_i \in A$ ist $a_i \geq 0$, also o.B.d.A. $a_i > 0$.
Dann existiert ein n_0, so daß $a > \frac{1}{2n_0}$. Folglich ist auch $a_i > \frac{1}{2n_0}$ für fast alle i
$\implies a_i \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}] \cup \ldots \cup [\frac{1}{2n_0+1}, \frac{1}{2n_0}] := A_{n_0}$.
A_{n_0} ist eine endliche Vereinigung von abgeschlossenen Mengen, also selbst abgeschlossen. Folglich ist $a \in A_{n_0} \subseteq A$ und somit A abgeschlossen.

(c) Offenbar ist A beschränkt in $\mathbb{R}^2$.
Sei (a,b) ein Häufungspunkt in A und $\big((x_i,y_i)\big)$ eine Folge in A mit $(x_i,y_i) \to (a,b)$. Wegen $x_i \to a$, $y_i \to b$ und $x_i, y_i \in [0,1]$ sind auch $a, b \in [0,1]$, also $(a,b) \in A$. Folglich ist A kompakt.

(d) Es ist $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ und $\frac{\sqrt{2}}{2} \notin \mathbb{Q}$. Sei (x_i) eine Folge in $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ mit $x_i \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_i \to \frac{\sqrt{2}}{2}$ und $y_i = x_i$. Dann ist $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ein Häufungspunkt von $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ und $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ein Häufungspunkt von $\{(x_i, y_i) : i \in \mathbb{N}\} \subseteq A$, der nicht zu A gehört. Folglich ist A nicht abgeschlossen und damit nicht kompakt.

(e) A ist nicht beschränkt in $\mathbb{R}^2$ und daher nicht kompakt.