

Kapitel 12

Aufgabensammlung

12.6 Der n-dimensionale ... Raum ...

6.14 A, B seien Teilmengen des \mathbb{R}^n . Zeigen Sie:

12/6/14/1

- (a) Sind A und B kompakt, dann ist auch $A \cup B$ kompakt.
- (b) Ist A kompakt und B abgeschlossen, dann ist $A \cap B$ kompakt.

Lösung zu Aufgabe 6.14

12/6/14/3

- (a) $A \cup B$ ist beschränkt, denn nach Voraussetzung existieren $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, so daß für alle $\bar{x} \in A$ und $\bar{y} \in B$ gilt: $|\bar{x}| \leq c_1$ und $|\bar{y}| \leq c_2$. Dann ist $|\bar{z}| \leq \max\{c_1, c_2\}$ für alle $\bar{z} \in A \cup B$.

Es bleibt noch zu zeigen, daß $A \cup B$ abgeschlossen ist.

Ist \bar{a} ein Häufungspunkt von $A \cup B$, dann liegen (nach Voraussetzung) in jeder Umgebung $U_\varepsilon(\bar{a})$ unendlich viele Elemente aus $A \cup B$. Folglich befinden sich in $U_\varepsilon(\bar{a})$ schon unendlich viele Elemente aus A oder unendlich viele Elemente aus B . Damit ist \bar{a} ein Häufungspunkt von A oder von B , also $\bar{a} \in A$ oder $\bar{a} \in B$, d.h. $\bar{a} \in A \cup B$.

- (b) Da Teilmengen von beschränkten Mengen wieder beschränkt sind, ist $A \cap B$ beschränkt.

Ist \bar{a} ein Häufungspunkt von $A \cap B$, dann ist \bar{a} insbesondere ein Häufungspunkt von A und von B . Wegen der Abgeschlossenheit von A und B ist $\bar{a} \in A$ und $\bar{a} \in B$, also $\bar{a} \in A \cap B$.