Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.6 Der n-dimensionale ... Raum ...

6.14 A, B seien Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: **12/6/14/1**

(a) Sind A und B kompakt, dann ist auch $A \cup B$ kompakt.

(b) Ist A kompakt und B abgeschlossen, dann ist $A \cap B$ kompakt.

Lösungshinweis zu Aufgabe 6.14 Mit Hilfe der Definition von „kompakt" und „abgeschlossen" ist der Beweis leicht zu führen. **12/6/14/2**

Lösung zu Aufgabe 6.14 **12/6/14/3**

(a) $A \cup B$ ist beschränkt, denn nach Voraussetzung existieren $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, so daß für alle $\overline{x} \in A$ und $\overline{y} \in B$ gilt: $|\overline{x}| \leq c_1$ und $|\overline{y}| \leq c_2$. Dann ist $|\overline{z}| \leq \max\{c_1, c_2\}$ für alle $\overline{z} \in A \cup B$.
Es bleibt noch zu zeigen, daß $A \cup B$ abgeschlossen ist.
Ist $\overline{a}$ ein Häufungspunkt von $A \cup B$, dann liegen (nach Voraussetzung) in jeder Umgebung $U_\varepsilon(\overline{a})$ unendlich viele Elemente aus $A \cup B$. Folglich befinden sich in $U_\varepsilon(\overline{a})$ schon unendlich viele Elemente aus A oder unendlich viele Elemente aus B. Damit ist $\overline{a}$ ein Häufungspunkt von A oder von B, also $\overline{a} \in A$ oder $\overline{a} \in B$, d.h. $\overline{a} \in A \cup B$.

(b) Da Teilmengen von beschränkten Mengen wieder beschränkt sind, ist $A \cap B$ beschränkt.
Ist $\overline{a}$ ein Häufungspunkt von $A \cap B$, dann ist $\overline{a}$ insbesondere ein Häufungspunkt von A und von B. Wegen der Abgeschlossenheit von A und B ist $\overline{a} \in A$ und $\overline{a} \in B$, also $\overline{a} \in A \cap B$.