Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.6 Der n-dimensionale ... Raum ...

6.15 Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, daß A genau dann kompakt ist, wenn jede unendliche Teilmenge von A einen Häufungspunkt in A besitzt. **12/6/15/1**

Lösungshinweis zu Aufgabe 6.15 Sei o.B.d.A. die Menge A unendlich. **12/6/15/2**
($\longrightarrow$) Der Beweis erfolgt mit Hilfe des Satzes von Bolzano-Weierstraß.
($\longleftarrow$) Beschränktheit und Abgeschlossenheit werden am einfachsten indirekt nachgewiesen.

Lösung zu Aufgabe 6.15 Für endliche Mengen ist die Behauptung trivial. Es sei A unendlich. **12/6/15/3**

($\longrightarrow$) Sei A kompakt, also beschränkt und abgeschlossen und U eine unendliche Teilmenge von A. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (6/1/24) besitzt U einen Häufungspunkt.

($\longleftarrow$) Angenommen, A ist nicht beschränkt, d.h., für jedes $c \in \mathbb{R}$ gibt es ein $a \in A$ mit $|a| > c$. Dann läßt sich (induktiv) eine unendliche Teilmenge $U := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ von A definieren, die keinen Häufungspunkt besitzt.

Sei $a_0 \in A$ beliebig. Nach Voraussetzung existieren $a_1 \in A$ mit $|a_1| > |a_0| + 1$, $a_2 \in A$ mit $|a_2| > |a_1| + 1, \ldots$. Dies widerspricht der Voraussetzung. Folglich ist A beschränkt.

Es bleibt noch die Abgeschlossenheit von A nachzuweisen.

Angenommen, A ist nicht abgeschlossen. Dann besitzt A einen Häufungspunkt $\overline{a}$, der nicht zu A gehört. Damit existiert eine Folge $(\overline{x}_i)$ in A mit $\overline{x}_i \to \overline{a}$. Wegen $\overline{x}_i \in A$ ist $\overline{x}_i \neq \overline{a}$ und somit $U := \{\overline{x}_i : i \in \mathbb{N}\}$ eine unendliche Teilmenge von A. U besitzt nach Voraussetzung einen Häufungspunkt $\overline{b} \in U$. Dann gibt es eine Teilfolge $(\overline{x}_{i_j})$ von $(\overline{x}_i)$, die gegen $\overline{b}$ konvergiert. Folglich gilt: $\overline{x}_{i_j} \to \overline{b}$ und $\overline{x}_{i_j} \to \overline{a}$, also $\overline{b} = \overline{a}$ und somit $\overline{a} \in U \subseteq A$, $\lightning$!