Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.6 Der n-dimensionale ... Raum ...

6.16 Es sei $M = \{x : 0 \leq x \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}$ und $\mathcal{U}$ ein System von Teilmengen von $\mathbb{R}$, so daß $\mathcal{U} = \{U(x) : U(x) = \left(\frac{x}{2}, \frac{3x}{2}\right)$ und $0 < x < 1\} \cup \{U_\varepsilon(0)\}$, wobei $\varepsilon > 0$ beliebig. **12/6/16/1**

(a) Zeigen Sie, daß $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von M ist und wählen Sie ein endliches Teilsystem $\mathcal{U}_0$ von $\mathcal{U}$ aus, durch das M bereits überdeckt wird.

(b) Zeigen Sie, daß $\mathcal{U}' = \{U(x) : U(x) = \left(\frac{x}{2}, \frac{3x}{2}\right)$ und $0 < x < 1\}$ eine Überdeckung von $M' = \{x : 0 < x < 1\}$ ist und daß es kein endliches Teilsystem $\mathcal{U}_0' \subseteq \mathcal{U}$ gibt, so daß M' durch $\mathcal{U}_0'$ überdeckt wird.

Lösung zu Aufgabe 6.16 **12/6/16/3**

(a) Sei $a \in M$. Wir zeigen, daß a Element wenigstens einer Menge aus $\mathcal{U}$ ist.
Ist $a = 0$, dann ist $a \in U_\varepsilon(0)$. Sei jetzt $a \neq 0$ und damit $0 < a \leq 1$.
Wir bilden $U(x)$ für $x = a$, also $U(a) = \left(\frac{a}{2}, \frac{3a}{2}\right) \implies a \in U(a)$.
Wir wählen jetzt eine endliche Überdeckung $\mathcal{U}_0$ aus.
Sei $a_0 > 0$ und a_0 so klein, daß $0 < \frac{a_0}{2} < \varepsilon$. Nach dem Archimedischen Axiom gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so daß $ka_0 \geq 1$, also erst recht $\frac{3ka_0}{2} > 1$.
Wir betrachten $\mathcal{U}_0 := \{U_\varepsilon(0), U(a_0), U(2a_0), \ldots, U(ka_0)\}$. Offenbar ist $\mathcal{U}_0$ ein endliches Teilsystem von $\mathcal{U}$, durch das M überdeckt wird (denn die Intervalle „überlappen" sich).

(b) Für $a \in M'$ ist $a \in U(a) = \left(\frac{a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$, folglich wird M' durch $\mathcal{U}'$ überdeckt.
Angenommen, es gibt ein endliches Teilsystem $\mathcal{U}_0'$ von $\mathcal{U}'$, durch das M' überdeckt wird. Unter den endlich vielen Elementen x, mit denen die Intervalle $U(x) := \left(\frac{x}{2}, \frac{3x}{2}\right)$ gebildet sind, gibt es ein kleinstes x_0 (mit $0 < x_0 < 1$). Dann ist z.B. $\frac{x_0}{3} < \frac{x_0}{2}$. Folglich wird $\frac{x_0}{3}$ durch keine Menge aus $\mathcal{U}'$ überdeckt. Dies widerspricht der Annahme.