

## Kapitel 12 Aufgabensammlung

### 12.6 Der n-dimensionale ... Raum ...

**6.16** Es sei  $M = \{x : 0 \leq x \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}$  und  $\mathcal{U}$  ein System von Teilmengen von  $\mathbb{R}$ , so daß  $\mathcal{U} = \{U(x) : U(x) = \left(\frac{x}{2}, \frac{3x}{2}\right) \text{ und } 0 < x < 1\} \cup \{U_\varepsilon(0)\}$ , wobei  $\varepsilon > 0$  beliebig. 12/6/16/1

- (a) Zeigen Sie, daß  $\mathcal{U}$  eine Überdeckung von  $M$  ist und wählen Sie ein endliches Teilsystem  $\mathcal{U}_0$  von  $\mathcal{U}$  aus, durch das  $M$  bereits überdeckt wird.
- (b) Zeigen Sie, daß  $\mathcal{U}' = \{U(x) : U(x) = \left(\frac{x}{2}, \frac{3x}{2}\right) \text{ und } 0 < x < 1\}$  eine Überdeckung von  $M' = \{x : 0 < x < 1\}$  ist und daß es kein endliches Teilsystem  $\mathcal{U}'_0 \subseteq \mathcal{U}'$  gibt, so daß  $M'$  durch  $\mathcal{U}'_0$  überdeckt wird.

**Lösungshinweis zu Aufgabe 6.16** (a) Sei  $a_0 > 0$  und  $\frac{a_0}{2} < \varepsilon$ . Weiterhin sei  $k \in \mathbb{N}$  mit  $ka_0 \geq 1$ . Dann ist 12/6/16/2

$\mathcal{U}_0 := \{U_\varepsilon(0), U(a_0), \dots, U(ka_0)\}$  ein überdeckendes endliches Teilsystem von  $\mathcal{U}$ .

- (b) Der Beweis erfolgt leicht indirekt.

### Lösung zu Aufgabe 6.16

12/6/16/3

- (a) Sei  $a \in M$ . Wir zeigen, daß  $a$  Element wenigstens einer Menge aus  $\mathcal{U}$  ist.

Ist  $a = 0$ , dann ist  $a \in U_\varepsilon(0)$ . Sei jetzt  $a \neq 0$  und damit  $0 < a \leq 1$ .

Wir bilden  $U(x)$  für  $x = a$ , also  $U(a) = \left(\frac{a}{2}, \frac{3a}{2}\right) \implies a \in U(a)$ .

Wir wählen jetzt eine endliche Überdeckung  $\mathcal{U}_0$  aus.

Sei  $a_0 > 0$  und  $a_0$  so klein, daß  $0 < \frac{a_0}{2} < \varepsilon$ . Nach dem Archimedischen Axiom gibt es ein  $k \in \mathbb{N}$ , so daß  $ka_0 \geq 1$ , also erst recht  $\frac{3ka_0}{2} > 1$ .

Wir betrachten  $\mathcal{U}_0 := \{U_\varepsilon(0), U(a_0), U(2a_0), \dots, U(ka_0)\}$ . Offenbar ist  $\mathcal{U}_0$  ein endliches Teilsystem von  $\mathcal{U}$ , durch das  $M$  überdeckt wird (denn die Intervalle „überlappen“ sich).

- (b) Für  $a \in M'$  ist  $a \in U(a) = \left(\frac{a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$ , folglich wird  $M'$  durch  $\mathcal{U}'$  überdeckt.

Angenommen, es gibt ein endliches Teilsystem  $\mathcal{U}'_0$  von  $\mathcal{U}'$ , durch das  $M'$  überdeckt wird. Unter den endlich vielen Elementen  $x$ , mit denen die Intervalle  $U(x) := \left(\frac{x}{2}, \frac{3x}{2}\right)$  gebildet sind, gibt es ein kleinstes  $x_0$  (mit  $0 < x_0 < 1$ ). Dann ist z.B.  $\frac{x_0}{3} < \frac{x_0}{2}$ . Folglich wird  $\frac{x_0}{3}$  durch keine Menge aus  $\mathcal{U}'$  überdeckt. Dies widerspricht der Annahme.