Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.6 Der n-dimensionale ... Raum ...

6.17 Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $g(t) = (t, t^2)$, $0 \leq t \leq 1$, und $\mathfrak{k}$ die durch g definierte Kurve in der Ebene. Betrachtet man zu jedem Punkt $\overline{x}$ von $\mathfrak{k}$ die ε-Umgebung $U_\varepsilon(\overline{x})$ mit $\varepsilon = \frac{1}{5}$, dann erhält man eine offene Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_\varepsilon(\overline{x}) : \overline{x} \in \mathfrak{k}\}$ von $\mathfrak{k}$. **12/6/17/1**
Geben Sie endlich viele zu $\mathcal{U}$ gehörende Mengen an, die bereits $\mathfrak{k}$ vollständig überdecken (mit Zeichnung).

Lösungshinweis zu Aufgabe 6.17 Sei $a_1 = \frac{1}{10}$, $a_2 = \frac{3}{10}$, $a_3 = \frac{5}{10}$, $a_4 = \frac{7}{10}$, $a_5 = \frac{9}{10}$ und $a_6 = \frac{96}{100}$. Dann leistet $\mathcal{U}_0 = \{U_{\frac{1}{5}}(a_i, a_i^2) : i = 1, \ldots, 6\}$ das Verlangte. **12/6/17/2**

Lösung zu Aufgabe 6.17 Der Abstand zweier beliebiger Punkte (a, a^2) und (t, t^2) auf der Kurve $\mathfrak{k}$ ist gegeben durch **12/6/17/3**

$$|(a, a^2) - (t, t^2)| = \sqrt{(a-t)^2 + (a^2 - t^2)^2} = |a - t| \cdot \sqrt{1 + (a+t)^2} := (\star).$$

Wir wählen jetzt Zahlen $a_1 = \frac{1}{10}, a_2 = \frac{3}{10}, a_3 = \frac{5}{10}, a_4 = \frac{7}{10}, a_5 = \frac{9}{10}$ und $a_6 = \frac{96}{100}$ aus und zeigen, daß $\mathcal{U}_0 := \{U_{\frac{1}{5}}(a_i, a_i^2) : i = 1, \ldots, 6\}$ die Kurve $\mathfrak{k}$ vollständig überdeckt.
Für a_i mit $i = 1, \ldots, 4$ gilt: Wenn $|a_i - t| < \frac{1}{10}$, so

$$(\star) = |a_i - t| \cdot \sqrt{1 + (a_i + t)^2} \leq \frac{1}{10} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{7}{10} + \frac{8}{10}\right)^2} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{13} < \frac{1}{5}.$$

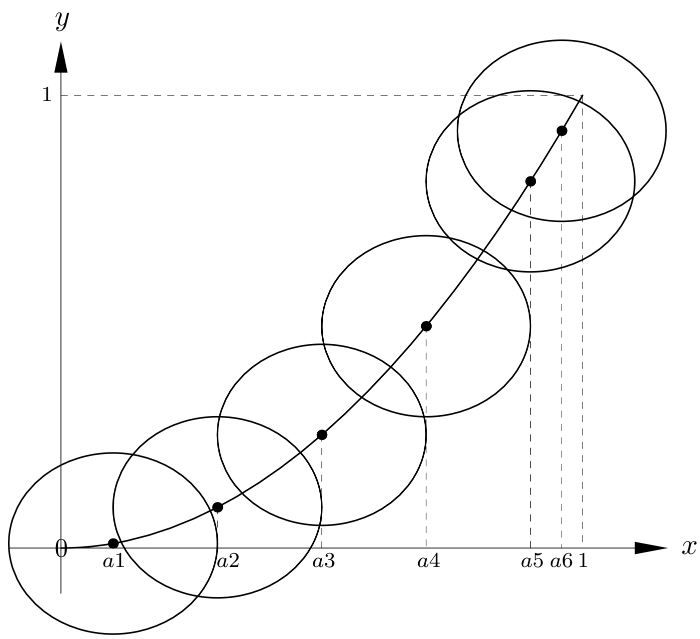
Wir betrachten jetzt a_5 und wählen t aus dem Intervall $\left[\frac{8}{10}, \frac{93}{100}\right]$. Dann gilt

$$(\star) \leq \frac{1}{10} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{80 + 93}{100}\right)^2} < \frac{1}{10} \cdot 2 = \frac{1}{5}.$$

Für a_6 bleibt noch das Intervall $\left[\frac{93}{100}, 1\right]$ für t zu berücksichtigen.
Dafür ist $|a_6 - t| \leq \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$ und somit

$$(\star) \leq \frac{1}{25} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{96}{100} + 1\right)^2} \leq \frac{1}{25} \cdot \sqrt{5} < \frac{1}{5}.$$

Damit ist $\mathfrak{k}$ durch $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$ vollständig überdeckt.



Es gibt natürlich noch viele andere Beispiele; dieses hier ist aber rechnerisch relativ einfach zu bewältigen.