Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.1 (a) Zeigen Sie, daß für eine in a differenzierbare Funktion f im Allgemeinen nicht gilt: $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{|x-a|}$. **12/7/1/1**

(b) Man gebe ein Beispiel dafür an, daß die obige Gleichung erfüllt ist!

Lösung zu Aufgabe 7.1 **12/7/1/3**

(a) Als Gegenbeispiel betrachten wir $f(x) = x$ an der Stelle $a = 0$.
Offenbar ist f in $a = 0$ differenzierbar und $f'(0) = 1$.
Weiterhin gilt für $x \neq 0$:

$$\frac{f(x)-f(a)}{|x-a|} = \frac{x}{|x|} \quad \text{und somit}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(a)}{|x-a|} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x)-f(a)}{|x-a|} = -1.$$

Folglich existiert der Limes von $\dfrac{f(x)-f(a)}{|x-a|}$ an der Stelle $a = 0$ nicht.

(b) Es sei $f(x) = x^2$ und $a = 0$. Dann gilt:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-0}{x-0} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2-0}{|x-0|} = 0.$$

Folglich ist in diesem Fall $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(a)}{|x-a|}$.