

## Kapitel 12

### Aufgabensammlung

#### 12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

**7.2** Es sei  $f(x) = x^2$ . Wie groß kann eine  $\varepsilon$ -Umgebung  $U$  von 3 höchstens gewählt werden, so daß bei Ersetzung von  $f$  durch die Tangentenfunktion der Fehler in  $U$  stets kleiner als  $\frac{1}{100}$  ist? 12/7/2/1

**Lösung zu Aufgabe 7.2** Die Tangente von  $f(x) = x^2$  an der Stelle 3 ist durch  $t(x) = f'(3)(x - 3) + f(3) = 6x - 9$  gegeben. Wir betrachten zunächst alle  $x \in \mathbb{R}$ , so daß die Ungleichung 12/7/2/3

$$(\star) \quad |f(x) - t(x)| = |x^2 - 6x + 9| < \frac{1}{100}$$

erfüllt ist und bestimmen daraus ein entsprechendes  $\varepsilon > 0$ , so daß die Ungleichung  $(\star)$  für alle  $x \in U_\varepsilon(3)$  gilt.

Wegen  $x^2 - 6x + 9 = 0 \iff x = 3$  ist  $x^2 - 6x + 9 \geq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

Folglich ist  $|x^2 - 6x + 9| = x^2 - 6x + 9$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

Wir betrachten jetzt  $x$  in einer Umgebung von 3 und setzen dazu  $x := 3 + u$ .

Dann ist

$$(\star) \iff (3 + u)^2 - 6(3 + u) + 9 < \frac{1}{100} \iff u^2 < \frac{1}{100} \iff |u| < \frac{1}{10}.$$

$\varepsilon = \frac{1}{10}$  leistet das Verlangte.