Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.3 Man begründe die folgenden Näherungsformeln: **12/7/3/1**

(a) $\sin x \approx x$ falls $|x|$ „hinreichend klein" ist,

(b) $\cos x \approx \frac{\pi}{2} - x$ falls $|\frac{\pi}{2} - x|$ „hinreichend klein" ist,

(c) $\ln x \approx x - 1$ falls $|x-1|$ „hinreichend klein" ist,

(d) $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3}$ falls $|x|$ „hinreichend klein" ist.

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.3 Sei f in a differenzierbar. Ist durch $t(x)$ die Tangente von f an der Stelle a gegeben, so gilt für (a) - (d): **12/7/3/2**

$\lim\limits_{x\to a}(f(x) - t(x)) = 0,$ also $f(x) \approx t(x)$ für kleine $|x-a|$.

Lösung zu Aufgabe 7.3 Ist f eine Funktion, die an der Stelle $x = a$ differenzierbar ist, dann ist die Tangente von f an dieser Stelle durch $t(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$ gegeben. Da differenzierbare Funktionen stetig sind, ist $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. **12/7/3/3**

Wegen $\lim\limits_{x\to a} t(x) = \lim\limits_{x\to a}\Big(f'(a)(x-a) + f(a)\Big) = f(a)$ gilt:

$$\lim_{x\to a}\Big(f(x) - t(x)\Big) = 0 \text{ und somit } f(x) \approx t(x) \text{ für „kleine" } |x-a|.$$

(a) $\sin$ ist an der Stelle $x = 0$ differenzierbar und $t(x) = \sin' 0 \cdot (x-0) + \sin 0 = x$.
Wegen $0 = \lim\limits_{x\to 0}\Big(f(x) - t(x)\Big) = \lim\limits_{x\to 0}(\sin x - x)$ ist $\sin x \approx x$ für „kleine" $|x|$.

(b) $\cos$ ist an der Stelle $x = \frac{\pi}{2}$ differenzierbar und $t(x) = \cos'(\frac{\pi}{2}) \cdot (x - \frac{\pi}{2}) + \cos(\frac{\pi}{2}) = -x + \frac{\pi}{2}$.
Wegen $0 = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\Big(f(x) - t(x)\Big) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\Big(\cos x - (\frac{\pi}{2} - x)\Big)$ ist $\cos x \approx \frac{\pi}{2} - x$ für „kleine" $|\frac{\pi}{2} - x|$.

(c) $\ln$ ist an der Stelle $x = 1$ differenzierbar und $t(x) = \ln' 1 \cdot (x-1) + \ln 1 = x - 1$.
Analog wie unter (b) ist $\ln x \approx x - 1$ für „kleine" $|x-1|$.

(d) $\sqrt[3]{1+x}$ ist an der Stelle $x = 0$ differenzierbar und $t(x) = \frac{1}{3}(x-0) + 1 = \frac{x}{3} + 1$.
Analog wie unter (b) ist dann $\sqrt[3]{1+x} \approx \frac{x}{3} + 1$ für „kleine" $|x|$.