

## Kapitel 12

### Aufgabensammlung

#### 12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.4 Zeigen Sie, daß die Ableitung einer differenzierbaren geraden Funktion ungerade 12/7/4/1  
und die Ableitung einer differenzierbaren ungeraden Funktion gerade ist!

**Lösung zu Aufgabe 7.4** Für differenzierbare Funktionen  $f$  gilt nach Definition: 12/7/4/3

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Sei  $f$  gerade, also  $f(-x) = f(x)$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} f'(-a) &= \lim_{x \rightarrow -a} \frac{f(x) - f(-a)}{x - (-a)} = \lim_{x \rightarrow -a} \frac{f(-x) - f(a)}{-(-x - a)} \\ &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{-(z - a)} \quad (\text{für } z := -x; \quad x \rightarrow -a \iff z \rightarrow a) \\ &= - \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = -f'(a). \end{aligned}$$

Folglich ist  $f'$  ungerade.

Sei  $f$  ungerade, also  $f(-x) = -f(x)$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} f'(-a) &= \lim_{x \rightarrow -a} \frac{f(x) - f(-a)}{x - (-a)} = \lim_{x \rightarrow -a} \frac{-(f(-x) - f(a))}{-(-x - a)} \\ &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{-(f(z) - f(a))}{-(z - a)} \quad (\text{für } z := -x; \quad x \rightarrow -a \iff z \rightarrow a) \\ &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = f'(a). \end{aligned}$$

Folglich ist  $f'$  gerade.