Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.4 Zeigen Sie, daß die Ableitung einer differenzierbaren geraden Funktion ungerade und die Ableitung einer differenzierbaren ungeraden Funktion gerade ist! **12/7/4/1**

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.4 Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus den Eigenschaften gerader und ungerader Funktionen. **12/7/4/2**

Lösung zu Aufgabe 7.4 Für differenzierbare Funktionen f gilt nach Definition: $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$. **12/7/4/3**

Sei f gerade, also $f(-x) = f(x)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f'(-a) &= \lim_{x\to -a} \frac{f(x)-f(-a)}{x-(-a)} = \lim_{x\to -a} \frac{f(-x)-f(a)}{-(-x-a)} \\ &= \lim_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{-(z-a)} \qquad (\text{für } z := -x; \quad x\to -a \iff z \to a) \\ &= -\lim_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} = -f'(a). \end{aligned}$$

Folglich ist f' ungerade.

Sei f ungerade, also $f(-x) = -f(x)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f'(-a) &= \lim_{x\to -a} \frac{f(x)-f(-a)}{x-(-a)} = \lim_{x\to -a} \frac{-(f(-x)-f(a))}{-(-x-a)} \\ &= \lim_{z\to a} \frac{-(f(z)-f(a))}{-(z-a)} \qquad (\text{für } z := -x; \quad x\to -a \iff z \to a) \\ &= \lim_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} = f'(a). \end{aligned}$$

Folglich ist f' gerade.