Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.6 Bilden Sie die Ableitung folgender Funktionen: **12/7/6/1**

(a) $f(x) = \left(2x + x \cdot \sqrt[4]{x^3}\right)^2$,

(b) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x - \sqrt{x}}}$,

(c) $f(x) = \sqrt{a \cdot \sin^2(xb) \cdot \cos^2 x}$,

(d) $f(x) = x^3 \cdot e^{3x} \cdot \ln(x^2)$,

(e) $f(x) = x^x$,

(f) $f(x) = x^{\sin x}$,

(g) $f(x) = (\sin x)^x$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.6 (a) $f'(x) = 2\left(2x + x\cdot\sqrt[4]{x^3}\right)\cdot\left(2x + \frac{7}{4}\cdot\sqrt[4]{x^3}\right)$. **12/7/6/2**

(b) $f'(x) = \dfrac{2x\sqrt{x} - 4x + 1}{4\sqrt{x}\cdot\sqrt{(x - \sqrt{x}\,)^3}}$.

(c) $f'(x) = \dfrac{a\cdot\sin(xb)\cdot\cos x\cdot\left(b\cdot\cos(xb)\cos x - \sin(xb)\cdot\sin x\right)}{\sqrt{a\cdot\sin^2(xb)\cdot\cos^2 x}}$.

(d) $f'(x) = \mathrm{e}^{3x}\left(3x^3\ln(x^2) + 3x^2\cdot\ln(x^2) + 2x^2\right)$.

(e) $f'(x) = x^x\cdot\left(\ln x + 1\right)$.

(f) $f'(x) = x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \sin x\cdot\frac{1}{x}\right)$.

(g) $f'(x) = (\sin x)^x \cdot \left(\ln(\sin x) + x\cdot\cot x\right)$.

Lösung zu Aufgabe 7.6 **12/7/6/3**

(a)
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\left(2x + x\cdot\sqrt[4]{x^3}\right)\cdot\left(2x + x\cdot\sqrt[4]{x^3}\right)' \\ &= 2\left(2x + x\cdot\sqrt[4]{x^3}\right)\cdot\left(2 + \tfrac{7}{4}\cdot\sqrt[4]{x^3}\right). \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sqrt{x - \sqrt{x}} - x\cdot\frac{1}{2}\left(x - \sqrt{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(x - \sqrt{x}\right)'}{x - \sqrt{x}} \\ &= \frac{2x - 2\sqrt{x} - x + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x - \sqrt{x}}\cdot\left(x - \sqrt{x}\right)} = \frac{2x\sqrt{x} - 4x + 1}{4\sqrt{x}\sqrt{(x - \sqrt{x}\,)^3}}. \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\left(a\cdot\sin^2(xb)\cdot\cos^2 x\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(a\cdot\sin^2(xb)\cdot\cos^2 x\right)' \\ &= \frac{a\cdot\left(2\sin(xb)\cdot\cos(xb)\cdot b\cdot\cos^2 x + \sin^2(xb)\cdot 2\cos x(-\sin x)\right)}{2\sqrt{a\cdot\sin^2(xb)\cdot\cos^2 x}} \\ &= \frac{a\cdot\sin(xb)\cdot\cos x\cdot\left(b\cdot\cos(xb)\cos x - \sin(xb)\cdot\sin x\right)}{\sqrt{a\cdot\sin^2(xb)\cdot\cos^2 x}}. \end{aligned}$$

(d) $f'(x) = 3x^2 \cdot \Big(\mathrm{e}^{3x} \cdot \ln(x^2)\Big) + x^3 \cdot \Big(3\mathrm{e}^{3x} \cdot \ln(x^2) + \mathrm{e}^{3x} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x\Big)$

$= \mathrm{e}^{3x}\Big(3x^3 \ln(x^2) + 3x^2 \cdot \ln(x^2) + 2x^2\Big).$

(e) Es ist $f(x) = x^x = \mathrm{e}^{x \ln x}$. Folglich ist

$f'(x) = \mathrm{e}^{x \ln x}\Big(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\Big) = x^x \cdot \Big(\ln x + 1\Big).$

(f) Es ist $f(x) = x^{\sin x} = \mathrm{e}^{\sin x \cdot \ln x}$, also

$f'(x) = \mathrm{e}^{\sin x \cdot \ln x}\Big(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}\Big)$

$= x^{\sin x}\Big(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}\Big).$

(g) Es ist $f(x) = (\sin x)^x = \mathrm{e}^{x \cdot \ln(\sin x)}$, also

$f'(x) = \mathrm{e}^{x \cdot \ln(\sin x)} \cdot \Big(\ln(\sin x) + x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x\Big)$

$= (\sin x)^x \cdot \Big(\ln(\sin x) + x \cdot \cot x\Big).$