Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.8 Folgende Funktionen sind auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit zu untersuchen: **12/7/8/1**

(a) $f(x) = |x-2|, \quad x \in \mathbb{R}$,

(b) $f(x) = \begin{cases} x^2+2x, & \text{für } x \le -2, \\ 0, & \text{für } x > -2. \end{cases}$

Lösung zu Aufgabe 7.8 **12/7/8/3**

(a) Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig.

Wir zeigen zunächst, daß f an der Stelle a stetig ist.
Dazu sei (a_n) ein Folge mit $a_n \to a$. Es ist

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} |a_n - 2| = |\lim_{n\to\infty} a_n - 2| = |a-2| = f(a).$$

Folglich ist f an einer beliebigen Stelle $a \in \mathbb{R}$ stetig.

Es sei jetzt $a \ne 2$.

Wir zeigen, daß f an der Stelle a differenzierbar ist.
1. Fall: $a > 2$; dann ist $|a-2| = a-2$ und für alle x in einer hinreichend kleinen Umgebung $U(a)$ gilt ebenfalls $|x-2| = x-2$. Folglich ist

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{x-2-(a-2)}{x-a} = 1, \text{ also } \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) = 1.$$

2. Fall: $a < 2$: dann ist $|a-2| = -(a-2)$ und für $x \in U(a)$ ist $|x-2| = -(x-2)$. Folglich ist

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{-(x-2)+(a-2)}{x-a} = -1, \text{ also } \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) = -1.$$

Es sei jetzt $a = 2$.

Für $x > 2$ ist $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \dfrac{x-2}{x-2} = 1$ und
für $x < 2$ ist $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \dfrac{-(x-2)}{x-2} = -1$.

Links- und rechtsseitiger Limes von $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ an der Stelle 2 stimmen nicht überein; damit existiert der Limes dort nicht. Folglich ist f an der Stelle a nicht differenzierbar.

(b) Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig.

Wir zeigen zunächst, daß f in a stetig ist.
Da konstante Funktionen und die Identitätsfunktion stetig sind und Summen und Produkte von stetigen Funktionen ebenfalls stetig sind, ist f an allen Stellen $a \ne -2$ stetig.

Es sei nun $a = -2$. Dann ist

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} (x^2+2x) = 0 = f(a) \text{ und}$$

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} 0 = 0.$$

Also $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Folglich ist f auch in $a = -2$ stetig.

Es sei jetzt $a \neq -2$.

Wir zeigen, daß f in a differenzierbar ist.
Da konstante Funktionen und die Identitätsfunktion differenzierbar sind und Summen und Produkte von differenzierbaren Funktionen ebenfalls differenzierbar sind, ist f an allen Stellen $a \neq -2$ differenzierbar.

Es sei nun $a = -2$. Dann gilt für $x < -2$:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 + 2x - a^2 - 2a}{x - a} = \frac{x^2 + 2x}{x + 2} = x \xrightarrow[x\to -2]{} -2.$$

Für $x > -2$ erhält man:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{0 - a^2 - 2a}{x - a} = \frac{0}{x - a} = 0.$$

Links- und rechtsseitiger Grenzwert des Differenzenquotienten stimmen nicht überein. Folglich ist f an der Stelle $a = -2$ nicht differenzierbar.