

Kapitel 12

Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.8 Folgende Funktionen sind auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit zu untersuchen: 12/7/8/1

(a) $f(x) = |x - 2|$, $x \in \mathbb{R}$,

(b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & \text{für } x \leq -2, \\ 0, & \text{für } x > -2. \end{cases}$

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.8 (a) Die Stetigkeit ist trivial. 12/7/8/2

Für $a > 2$ ist f in a differenzierbar und $f'(a) = 1$.

Für $a < 2$ ist f in a differenzierbar und $f'(a) = -1$.

f ist in $a = 2$ nicht differenzierbar.

(b) f ist in \mathbb{R} stetig und in $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ differenzierbar; f ist an der Stelle -2 nicht differenzierbar.

Lösung zu Aufgabe 7.8 12/7/8/3

(a) Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig.

Wir zeigen zunächst, daß f an der Stelle a stetig ist.

Dazu sei (a_n) ein Folge mit $a_n \rightarrow a$. Es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - 2| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - 2 \right| = |a - 2| = f(a).$$

Folglich ist f an einer beliebigen Stelle $a \in \mathbb{R}$ stetig.

Es sei jetzt $a \neq 2$.

Wir zeigen, daß f an der Stelle a differenzierbar ist.

1. Fall: $a > 2$; dann ist $|a - 2| = a - 2$ und für alle x in einer hinreichend kleinen Umgebung $U(a)$ gilt ebenfalls $|x - 2| = x - 2$. Folglich ist

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x - 2 - (a - 2)}{x - a} = 1, \text{ also } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) = 1.$$

2. Fall: $a < 2$: dann ist $|a - 2| = -(a - 2)$ und für $x \in U(a)$ ist $|x - 2| = -(x - 2)$. Folglich ist

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{-(x - 2) + (a - 2)}{x - a} = -1, \text{ also } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) = -1.$$

Es sei jetzt $a = 2$.

Für $x > 2$ ist $\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{x - 2}{x - 2} = 1$ und

für $x < 2$ ist $\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{-(x - 2)}{x - 2} = -1$.

Links- und rechtsseitiger Limes von $\frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ an der Stelle 2 stimmen nicht überein; damit existiert der Limes dort nicht. Folglich ist f an der Stelle a nicht differenzierbar.

(b) Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig.

Wir zeigen zunächst, daß f in a stetig ist.

Da konstante Funktionen und die Identitätsfunktion stetig sind und Summen und Produkte von stetigen Funktionen ebenfalls stetig sind, ist f an allen Stellen $a \neq -2$ stetig.

Es sei nun $a = -2$. Dann ist

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} (x^2 + 2x) = 0 = f(a) \quad \text{und}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} 0 = 0.$$

Also $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Folglich ist f auch in $a = -2$ stetig.

Es sei jetzt $a \neq -2$.

Wir zeigen, daß f in a differenzierbar ist.

Da konstante Funktionen und die Identitätsfunktion differenzierbar sind und Summen und Produkte von differenzierbaren Funktionen ebenfalls differenzierbar sind, ist f an allen Stellen $a \neq -2$ differenzierbar.

Es sei nun $a = -2$. Dann gilt für $x < -2$:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 + 2x - a^2 - 2a}{x - a} = \frac{x^2 + 2x}{x + 2} = x \xrightarrow{x \rightarrow -2} -2.$$

Für $x > -2$ erhält man:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{0 - a^2 - 2a}{x - a} = \frac{0}{x - a} = 0.$$

Links- und rechtsseitiger Grenzwert des Differenzenquotienten stimmen nicht überein. Folglich ist f an der Stelle $a = -2$ nicht differenzierbar.