Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.9 Bilden Sie die Ableitung folgender Funktionen: **12/7/9/1**

(a) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x \le 0, \\ x^4 + 1, & \text{für } x > 0. \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{für } x < 0, \\ \mathrm{e}^x, & \text{für } x \ge 0. \end{cases}$

Lösung zu Aufgabe 7.9 **12/7/9/3**

(a) Für $x < 0$ ist $f'(x) = 0$; für $x > 0$ ist $f'(x) = 4x^3$.
Es sei nun $a = 0$. Wir bilden $f'(a)$.
Für $x < 0$ ist $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{1 - 1}{x} = 0$ und
für $x > 0$ ist $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{x^4 + 1 - 1}{x} = x^3 \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x > 0}]{} 0.$
Links- und rechtsseitiger Limes des Differenzenquotienten stimmen an der Stelle 0 überein und sind 0. Folglich ist $f'(0) = 0$.

(b) Für $x < 0$ ist $f'(x) = 1$; für $x > 0$ ist $f'(x) = \mathrm{e}^x$.
Es sei nun $a = 0$. Wir bilden $f'(a)$.
Für $x < 0$ ist $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{x + 1 - \mathrm{e}^0}{x} = 1.$
Für $x > 0$ ist $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^0}{x} \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x > 0}]{} 1.$
(Hierbei wird ausgenutzt, daß $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$, insbesondere an der Stelle 0.)
Folglich ist $f'(0) = 1$.