Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.10 (a) An die Funktion $f(x) = \mathrm{e}^x$ werde im Punkt (a, b) die Tangente gelegt. Die Tangente schneide die x-Achse an der Stelle c. **12/7/10/1**
Zeigen Sie, daß der Abstand zwischen a und c stets 1 beträgt.

(b) Die an die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, im Punkt (a, b) gelegte Tangente bildet mit den Koordinatenachsen ein Dreieck.
Man zeige, daß der Flächeninhalt des Dreiecks unabhängig von der Wahl des Punktes (a, b) ist.

Lösung zu Aufgabe 7.10 **12/7/10/3**

(a) Nach Voraussetzung ist $b = \mathrm{e}^a$. Die Tangente ist gegeben durch

$$t(x) = \mathrm{e}^a(x - a) + \mathrm{e}^a = \mathrm{e}^a(x - a + 1).$$

Aus $t(x) = 0$ berechnet man c. Es ist

$$t(x) = 0 \iff x - a + 1 = 0 \iff x = a - 1 = c.$$

Folglich ist $a - c = a - (a - 1) = 1$.

(b) Nach Voraussetzung ist $b = \frac{1}{a}$, $a \neq 0$. Die Tangente ist gegeben durch

$$t(x) = f'(a)(x - a) + f(a) = -\frac{1}{a^2}(x - a) + \frac{1}{a} = -\frac{x}{a^2} + \frac{2}{a}.$$

$t(x) = 0 \iff x = 2a$. $2a$ ist die Länge der Grundlinie des rechtwinkligen Dreiecks und $t(0) = \frac{2}{a}$ ist die Länge der Höhe. Folglich ist der Flächeninhalt des Dreiecks: $F = \frac{1}{2}(2a \cdot \frac{2}{a}) = 2$.