Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.11 (a) Für welchen Wert von a schneidet die Kurve $y = f(x) = \frac{ax - x^3}{4}$ die x-Achse unter einem Winkel von $45°$? **12/7/11/1**

(b) Man bestimme die zu der Geraden $y = x$ parallele Tangente an der Parabel $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{3}$.

(c) Man gebe die Gleichung der zur x-Achse parallel verlaufenden Tangente an der Funktion $f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$ an.

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.11 (a) $f'''(x) = 60x^2 \ln x + 47x^2$. **12/7/11/2**

(b) $f^{(50)}(x) = 2^{51}\mathrm{e}^{2x}\Big(x^2 + 50x + \frac{49 \cdot 25}{4}\Big)$.

(c) $f^{(4n)}(x) = a^{4n} \cdot \sin ax, \qquad f^{(4n+1)}(x) = a^{4n+1} \cdot \cos ax,$

$f^{(4n+2)}(x) = -a^{4n+2} \cdot \sin ax, \quad f^{(4n+3)}(x) = -a^{4n+3} \cdot \cos ax.$

Lösung zu Aufgabe 7.11 **12/7/11/3**

(a) Wir berechnen zunächst die Schnittpunkte von f mit der x-Achse.
Dazu setzen wir $f(x) = \frac{1}{4}x(a - x^2) = 0$.
Folglich ist $x = 0$ eine Lösung, und für $a > 0$ sind $x = \pm\sqrt{a}$ weitere Lösungen.
Der Anstieg von f an einer Stelle c ist gegeben durch $f'(c) = \frac{1}{4}(a - 3c^2)$.
Jetzt wird überprüft, ob es ein a gibt, so daß $f'(c) = 1$ an den Stellen $c = 0$ (für beliebiges a) und $c = \pm\sqrt{a}$ (für $a > 0$).
Für $c = 0$ ist $f'(c) = \frac{1}{4}a = 1 \iff a = 4$.
Für $c = \pm\sqrt{a}$ und $a > 0$ ist $f'(x) = \frac{1}{4}(a - 3a) = -\frac{1}{2}a = 1 \iff a = -2$.
Dies widerspricht der Bedingung $a > 0$.
Für $a = 4$ schneidet die Funktion f die x-Achse an der Stelle 0 im Winkel von $45°$.

(b) Wir suchen eine Stelle c, an der der Anstieg der Parabel $f(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 3x + 3)$ den Wert 1 annimmt.

$$f'(c) = \frac{1}{3}(2c - 3) = 1 \iff c = 3.$$

Folglich ist die Tangente gegeben durch

$$t(x) = f'(3)(x - 3) + f(3) = x - 2.$$

(c) Wir suchen eine Stelle c, an der der Anstieg von $f'(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$ den Wert 0 annimmt.

$$f'(c) = \mathrm{e}^c - \mathrm{e}^{-c} = 0 \iff 2c = \ln 1 = 0 = \iff c = 0.$$

Die Tangente ist somit gegeben durch

$$t(x) = f'(0)(x - 0) + f(0) = 2.$$