

Kapitel 12 Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.14 Es sei

12/7/14/1

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{für } x \leq 0, \\ ax^3 + bx^2 + cx + d, & \text{für } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{für } x > 1, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{für } x \leq 0, \\ Ax^2 + Bx + C, & \text{für } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

- (a) Bestimmen Sie reelle Zahlen a, b, c, d , so daß f in \mathbb{R} (stetig und) differenzierbar ist.
- (b) Läßt sich die für f formulierte Aufgabe auch für g lösen?

Lösung zu Aufgabe 7.14 Wir benutzen den folgenden Satz:

12/7/14/3

Sei die Funktion f in einer Umgebung des Punktes a definiert.

f besitzt an der Stelle a einen Grenzwert (bzw. den Grenzwert c) $\iff f$ besitzt an der Stelle a einen linksseitigen und einen rechtsseitigen Grenzwert und beide sind gleich (bzw. den linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwert c).

- (a) Wir untersuchen zunächst die Stetigkeit von f an der Stelle 0.

Offenbar gilt:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = d.$$

Hieraus folgt: $d = 0$.

Jetzt wird f an der Stelle 1 betrachtet.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = a + b + c + d = a + b + c \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = 0.$$

Damit erhält man eine Bedingung für die restlichen unbekanntenen Koeffizienten:

$$a + b + c = 0.$$

Wir untersuchen jetzt die Differenzierbarkeit von f an den Stellen 0 und 1.

Da die Ableitungen von ganz-rationalen Funktionen stetig sind, gilt:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f'(x) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (3ax^2 + 2bx + c) = c.$$

Folglich ist $c = 1$. Weiterhin ist

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (3ax^2 + 2bx + c) = 3a + 2b + c \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f'(x) = 0.$$

Folglich ist $3a + 2b + c = 0$. Damit haben wir folgende Informationen erhalten:

$$d = 0, \quad c = 1, \quad a + b + c = 0 \quad \text{und} \quad 3a + 2b + c = 0.$$

Zur Bestimmung der restlichen Koeffizienten bleibt nur noch das System der letzten beiden Gleichungen auszuwerten. Hieraus erhält man: $a = 1, b = -2$.

Eine Überprüfung zeigt, daß die gefundenen Werte das Problem tatsächlich lösen.

(b) Analog wie unter (a) ist

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} g(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = C;$$

also $C = 0$. Weiterhin ist

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} g(x) = A + B + C = A + B \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} g(x) = 0;$$

somit gilt: $A + B = 0$, also $A = -B$.

Die geforderte Differenzierbarkeit von g liefert:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} g'(x) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (2Ax + B) = B.$$

Damit ist $B = 1$ und $A = -1$. Schließlich ist

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} g'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (2Ax + B) = 2A + B \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} g'(x) = 0;$$

somit ist $2A + B = 0$. Dies widerspricht der Bedingung $A = -1, B = 1$.

Das Problem ist für g nicht lösbar.