

Kapitel 12

Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.15 Es sei

12/7/15/1

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0; \quad n = 0, 1, 2. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

- (a) f_0 ist in $x = 0$ unstetig,
- (b) f_1 ist in $x = 0$ stetig, aber nicht differenzierbar,
- (c) f_2 ist in $x = 0$ differenzierbar.

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.15 (a) ist trivial.

12/7/15/2

- (b) $|x \cdot \sin \frac{1}{x}| \leq |x| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$; hieraus folgt die Stetigkeit an der Stelle $x = 0$.

$\frac{x \cdot \sin \frac{1}{x}}{x} = \sin \frac{1}{x}$ besitzt an der Stelle 0 keinen Grenzwert.

Folglich ist f_1 in 0 nicht differenzierbar.

- (c) $\frac{x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}}{x} = x \cdot \sin \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, folglich ist f_2 in 0 differenzierbar.