Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.15 Es sei 12/7/15/1

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin\frac{1}{x}, & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0; \quad n = 0, 1, 2. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) f_0 ist in $x = 0$ unstetig,

(b) f_1 ist in $x = 0$ stetig, aber nicht differenzierbar,

(c) f_2 ist in $x = 0$ differenzierbar.

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.15 (a) ist trivial. 12/7/15/2

(b) $|x \cdot \sin\frac{1}{x}| \leq |x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0$; hieraus folgt die Stetigkeit an der Stelle $x = 0$.

$\frac{x \cdot \sin\frac{1}{x}}{x} = \sin\frac{1}{x}$ besitzt an der Stelle 0 keinen Grenzwert.
Folglich ist f_1 in 0 nicht differenzierbar.

(c) $\frac{x^2 \cdot \sin\frac{1}{x}}{x} = x \cdot \sin\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, folglich ist f_2 in 0 differenzierbar.

Lösung zu Aufgabe 7.15 12/7/15/3

(a) Es ist $f_0(0) = 0$. Wir betrachten die Nullfolge (a_n) mit $a_n := \frac{1}{(2n+\frac{1}{2}) \cdot \pi}$.
Dann gilt offenbar:

$$f_0(a_n) = \sin(2n + \tfrac{1}{2}) \cdot \pi = 1 \text{ für alle } n, \text{ also } \lim_{n\to\infty} f_0(a_n) = 1 \neq 0 = f_0(0).$$

Folglich ist f_0 in 0 nicht stetig.

(b) $|f_1(x) - f_1(0)| = |x \cdot \sin\frac{1}{x} - 0| = |x| \cdot |\sin\frac{1}{x}| \leq |x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$
Folglich ist $\lim_{x\to 0} f_1(x) = f_1(0)$ und somit f_1 in 0 stetig.
Weiterhin gilt für $x \neq 0$:

$$\frac{f_1(x) - f_1(0)}{x - 0} = \frac{x \cdot \sin\frac{1}{x}}{x} = \sin\tfrac{1}{x}.$$

Der Limes des Differenzenquotienten von f_1 an der Stelle 0 existiert nicht, somit ist f_1 in 0 nicht differenzierbar.

(c) Wir bilden den Differenzenquotienten von f_2 an der Stelle 0:

$$\frac{f_2(x) - f_2(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \cdot \sin\frac{1}{x}}{x} = x \cdot \sin\tfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

Der Limes des Differenzenquotienten existiert; folglich ist f_2 in 0 differenzierbar.