

## Kapitel 12

### Aufgabensammlung

#### 12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

**7.16** Es sei  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^3 \sin(\frac{1}{x}), & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$  12/7/16/1

Zeigen Sie:

- (a)  $f$  ist für alle  $x \in \mathbb{R}$  differenzierbar und  $f'(0) > 0$ ,
- (b)  $f'$  ist in  $\mathbb{R}$  stetig,
- (c)  $f$  ist in einer Umgebung von 0 monoton.

Geben Sie eine Beziehung zwischen dem Monotonieverhalten von  $f$  und dem Vorzeichen von  $f'$  an.

**Lösungshinweis zu Aufgabe 7.16** (a)  $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + 3x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} - x \cdot \cos \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 0. \end{cases}$  12/7/16/2

- (b) Die „rationale Zusammensetzung“ stetiger Funktionen ist wieder stetig.

$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0) = \frac{1}{2}$ . Folglich ist  $f$  in  $\mathbb{R}$  stetig.

- (c) Da  $f'$  stetig und  $f'(0) = \frac{1}{2} > 0$  ist, ist  $f$  in einer Umgebung von 0 streng monoton wachsend.