Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.16 Es sei $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^3 \sin(\frac{1}{x}), & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$ **12/7/16/1**

Zeigen Sie:

(a) f ist für alle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar und $f'(0) > 0$,

(b) f' ist in $\mathbb{R}$ stetig,

(c) f ist in einer Umgebung von 0 monoton.

Geben Sie eine Beziehung zwischen dem Monotonieverhalten von f und dem Vorzeichen von f' an.

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.16 (a) $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + 3x^2 \cdot \sin\frac{1}{x} - x \cdot \cos\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 0. \end{cases}$ **12/7/16/2**

(b) Die „rationale Zusammensetzung“ stetiger Funktionen ist wieder stetig.
$\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = f'(0) = \frac{1}{2}$. Folglich ist f in $\mathbb{R}$ stetig.

(c) Da f' stetig und $f'(0) = \frac{1}{2} > 0$ ist, ist f in einer Umgebung von 0 streng monoton wachsend.

Lösung zu Aufgabe 7.16 **12/7/16/3**

(a) Da rationale Funktionen und die Sinusfunktion in ihren Definitionsbereichen differenzierbar sind, ist f für alle $x \neq 0$ differenzierbar und es gilt für $x \neq 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{2} + 3x^2 \cdot \sin\frac{1}{x} - x \cdot \cos\frac{1}{x}.$$

Wir untersuchen jetzt den Differenzenquotienten von f an der Stelle 0.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{x}{2} + x^3 \cdot \sin\frac{1}{x}}{x} = \frac{1}{2} + x^2 \cdot \sin\frac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{2}.$$

Folglich ist f in 0 differenzierbar und

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{2}.$$

(b) Es ist

$$\begin{aligned} |f'(x) - f'(0)| &= |\tfrac{1}{2} + 3x^2 \cdot \sin\tfrac{1}{x} - x\cos\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{2}| \\ &= |3x^2| \cdot |\sin\tfrac{1}{x}| + |x| \cdot |\cos\tfrac{1}{x}| \\ &\leq 3|x^2| + |x| \xrightarrow[x \to 0]{} 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = f'(0);$$

somit ist f' in 0 stetig.

(c) Nach (a) und (b) ist f in $\mathbb{R}$ differenzierbar und f' dort stetig.
Wegen $f'(0) = \frac{1}{2} > 0$ existiert eine Umgebung von $U(0)$, so daß f' in $U(0)$ positiv ist (vgl. 6/3/11). Folglich ist f in $U(0)$ streng monoton wachsend.
Denn ist f in einem Intevall (a, b) differenzierbar und $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f in (a, b) streng monoton wachsend (vgl. 7/3/9).