Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.17 Zeigen Sie mit Hilfe des 1. Mittelwertsatzes (der Differentialrechnung): **12/7/17/1**

(a) Für jedes $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$,

(b) Für jedes $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|$,

(c) Für $x > 0$ gilt: $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.

Lösung zu Aufgabe 7.17 **12/7/17/3**

(a) Für $x = y$ ist die Behauptung trivial. Es sei nun $x \neq y$. Nach dem Mittelwertsatz ist $\frac{\sin x - \sin y}{x - y} = \cos z$ für ein z zwischen x und y. Also

$$|\sin x - \sin y| = |x - y| \cdot |\cos z| \leq |x - y|.$$

(b) Für $x = y$ gilt die Behauptung offenbar. Es sei $x \neq y$. Wegen $(\arctan z)' = \frac{1}{1+z^2}$ gilt nach dem Mittelwertsatz: $\frac{\arctan x - \arctan y}{x - y} = \frac{1}{1+z^2}$ für ein z zwischen x und y. Also

$$|\arctan x - \arctan y| = |x - y| \cdot \frac{1}{1+z^2} \leq |x - y|.$$

(c) Sei $f(x) = \ln(1+x)$. Wir benutzen den Mittelwertsatz für $y = 0 < x$. Dann gilt:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} = \frac{\ln(1+x)}{x} = f'(z) = \frac{1}{1+z}$$

für ein z mit $0 < z < x$. Folglich ist

$$\frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+z} = \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{1+z} < 1, \quad \text{also} \quad \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$