Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.18 Wenden Sie den Satz von Taylor auf die Funktion $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ an der Stelle $a = 0$ an, und berechnen Sie damit $\sqrt[3]{2}$ auf 2 Dezimalstellen genau (geänderte Fassung). **12/7/18/1**

Lösung zu Aufgabe 7.18 Es ist $f(x) = \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}}$. Induktiv über n zeigt man leicht: **12/7/18/3**

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-4)}{3^n} \cdot (1+x)^{-\frac{3n-1}{3}}.$$

Damit erhält man

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdots (3n-4)}{3^n}.$$

Aufgrund des Taylorschen Satzes für $a = 0$ (vgl. 7/2/9) ist

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \cdot x^i + R_n(x), \text{ wobei } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\vartheta x)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$

für ein ϑ mit $0 < \vartheta < 1$. Folglich ist

$$f(1) = \sqrt[3]{2} = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} + R_n(1) \text{ mit}$$

$$R_n(1) = (-1)^{n+2} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdots (3n-1)}{3^{n+1} \cdot (n+1)!} \cdot (1+\vartheta)^{-\frac{3n+2}{3}}.$$

Wegen $\vartheta > 0$ ist $1 + \vartheta > 1$. Folglich ist

$$|R_n(1)| \leq \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdots (3n-1)}{3^{n+1} \cdot (n+1)!}.$$

Für $n = 11$ ist $|R_n(x)| < \frac{1}{100}$. Damit gilt $\sqrt[3]{2} \approx \sum_{i=0}^{11} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$.