Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.19 Berechnen Sie mit Hilfe des Taylorschen Satzes: **12/7/19/1**

(a) $\cos\frac{1}{10}$, so daß der Fehler $\leq 10^{-6}$ wird,

(b) $\ln 2$, so daß der Fehler $\leq 10^{-1}$ wird,

(c) $e^{\frac{1}{100}}$, so daß der Fehler $\leq 10^{-6}$ wird.

[Hinweis: Man betrachte bei Aufgabe (b) die Funktion $\ln(1+x)$.]

Lösung zu Aufgabe 7.19 Nach dem Taylorsche Satz (vgl. 7/2/9) gilt: **12/7/19/3**

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot (x-a)^i + R_n(x),$$

wobei $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(a+\vartheta(x-a))}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}$ und $0 < \vartheta < 1$.

(a) Für $f(x) = \cos x$ ist

$$f'(x) = -\sin x,\ f''(x) = -\cos x,\ f'''(x) = \sin x,\ f^{(4)}(x) = \cos x \quad \text{und}$$
$$f^{(4n+i)}(x) = f^{(i)}(x).$$

Wir setzen $a = 0$, dann ist

$$f(a) = 1,\ f'(a) = 0,\ f''(a) = -1,\ f'''(a) = 0,\ f^{(4)}(a) = 1,\ f^{(4n+i)}(a) = f^{(i)}(a).$$

Offenbar ist stets $|f^{(n)}(x)| \leq 1$; somit gilt für $x = \frac{1}{10}$

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(a+\vartheta(x-a))|}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)! \cdot 10^{n+1}}.$$

Schließlich gilt für $n = 4$

$$|R_n(\tfrac{1}{10})| \leq \frac{1}{5! \cdot 10^5} < 10^{-6}. \text{ Also}$$

$$\cos\frac{1}{10} \approx \sum_{i=0}^{4} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \cdot 1^i = 1 - \frac{1}{2! \cdot 10^2} + \frac{1}{4! \cdot 10^4}.$$

(b) Sei $f(x) = \ln(1+x)$. Induktiv über $n \geq 1$ zeigt man leicht:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Für $a = 0$ und $x = 1$ ist

$$|R_n(x)| = \frac{1}{(n+1)!} \cdot |(-1)^n| \cdot \frac{n!}{(1+\vartheta)^{n+1}} \cdot 1^{n+1} = \frac{1}{(n+1) \cdot (1+\vartheta)^{n+1}} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Wählt man $n = 9$, so ist $|R_n(1)| \leq \frac{1}{10}$. Folglich ist

$$\ln 2 \approx \sum_{i=0}^{9} \frac{f^{(i)}}{i!} = \sum_{i=1}^{9} \frac{(-1)^{i-1}}{i}.$$

(c) Sei $f(x) = \mathrm{e}^x$. Dann ist $f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x$. Für $a = 0$ und $x = \frac{1}{100}$ gilt:

$$|R_n(\tfrac{1}{100})| = \frac{\mathrm{e}^{\frac{\vartheta}{100}}}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^{n+1} \leq \frac{4}{(n+1)! \cdot 10^{2n+2}}.$$

Wählt man $n = 2$, so ist $|R_n(\frac{1}{100})| < 10^{-6}$. Also

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{100}} \approx \sum_{i=0}^{2} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^i = 1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{2 \cdot 100^2}.$$