Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.20 Man gebe die Taylorentwicklung für folgende Funktionen an der Stelle 0 an: **12/7/20/1**

(a) $f(x) = a^x,\ a > 0,$

(b) $f(x) = \sqrt{1+x}$ (auf die Abschätzung des Restgliedes wird verzichtet),

(c) $f(x) = \ln(2+x),$ für $|x| \le 1.$

Lösung zu Aufgabe 7.20 Nach der Taylorschen Formel (vgl. 7/2/9 und 7/2/12) ist **12/7/20/3**

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(c)}{i!} \cdot (x-c)^i + R_n(x),$$

wobei $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c+\vartheta(x-c))}{(n+1)!} \cdot (x-c)^{n+1}$ und $0 < \vartheta < 1.$

(a) Für $f(x) = a^x = \mathrm{e}^{x \cdot \ln a}$ ist $f^{(n)}(x) = (\ln a)^n \cdot a^x.$ Folglich ist

$$|R_n(x)| = \frac{1}{(n+1)!} \cdot |(\ln a)^{n+1} \cdot a^{\vartheta x}| \cdot |x|^{n+1} \le \frac{|a^{\vartheta x}| \cdot |x \cdot \ln a|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

für jedes fixierte x. Somit ist

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \cdot x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^i}{i!} \cdot x^i.$$

(b) Sei $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$. Dann ist $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{1}{2}}$ und

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2n-3)}{2^n} \cdot (1+x)^{\frac{1}{2}-n}$$

für $n \ge 2$ und somit

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n}.$$

Folglich ist

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2} + \sum_{i=2}^{\infty} (-1)^{i+1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2i-3)}{2^i} \cdot x^i.$$

(c) Sei $f(x) = \ln(2+x)$. Dann ist $f'(x) = \dfrac{1}{2+x}$, und für $n \ge 2$ erhält man

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{(2+x)^n}.$$

Somit ist

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{2^n}.$$

Weiterhin gilt:

$$R_n(x) = (-1)^{n+2} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{(2+\vartheta x)^{n+1}} \cdot x^{n+1}, \text{ also}$$

$$|R_n(x)| = |(-1)^{n+2}| \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{|2+\vartheta x|^{n+1}} \cdot |x|^{n+1} \le \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad (\text{für } |x| \le 1).$$

Folglich ist

$$f(x) = \ln 2 + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \cdot \frac{(i-1)!}{2^i} \cdot x^i.$$