

Kapitel 12

Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.20 a Es sei $f(x) = x^2$. Wie groß kann eine ε -Umgebung U von 3 höchstens gewählt werden, so daß bei Ersetzung von f durch die Tangentenfunktion der Fehler in U stets kleiner als $\frac{1}{100}$ ist. 12/7/21/1

Lösung zu Aufgabe 7.20a Wir benutzen die Taylorsche Formel (vgl. 7/2/9) für $n = 1$. 12/7/21/3
Es ist $f'(x) = 2x$ und $f''(x) = 2$. Weiterhin ist $f(3) = 9$ und $f'(3) = 6$.
Für $t(x) = f(3) + f'(3)(x - 3)$ gilt nach der Taylorschen Formel für $a = 0$:

$$f(x) = t(x) + R_1(x) = t(x) + \frac{2}{2!} \cdot (x - 3)^2.$$

Folglich ist

$$|f(x) - t(x)| = |x - 3|^2 < \frac{1}{100} \iff |x - 3| < \frac{1}{10} \iff 3 - \frac{1}{10} < x < 3 + \frac{1}{10}.$$

$U_{\frac{1}{10}}(3)$ leistet das Verlangte.