Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.21 Berechnen Sie: **12/7/22/1**

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\tan 3x}$, (c) $\lim x \cdot \ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)$, $x \to 0$ $(x>0)$ bzw. $x \to \infty$,

(b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln(\sin 4x)}{\ln(\sin 3x)}$, (d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$.

Lösungshinweis zu Aufgabe 7.21 (a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\tan 3x} = \frac{5}{3}$. **12/7/22/2**

(b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln(\sin 4x)}{\ln(\sin 3x)} = 1$.

(c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x \cdot \ln\left(1+\frac{1}{2x}\right) = 0$; $\lim\limits_{x\to\infty} x \cdot \ln\left(1+\frac{1}{2x}\right) = \frac{1}{2}$.

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Lösung zu Aufgabe 7.21 Wir benutzen die Regeln von de l'Hospital. **12/7/22/3**

(a) Es ist $\frac{\sin 5x}{\tan 3x} = \frac{\sin 5x}{\sin 3x} \cdot \cos 3x$ und $\lim\limits_{x\to 0} \cos 3x = 1$.
Folglich genügt es, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x}$ zu bestimmen. Wegen

$$\frac{(\sin 5x)'}{(\sin 3x)'} = \frac{5 \cdot \cos 5x}{3 \cdot \cos 3x} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{5}{3}$$

gilt nach den Regeln von de l'Hospital: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\tan 3x} = \frac{5}{3}$.

(b) Es ist $\frac{[\ln(\sin 4x)]'}{[\ln(\sin 3x)]'} = \frac{4 \cdot \cos 4x}{3 \cdot \cos 3x} \cdot \frac{\sin 3x}{\sin 4x}$.
Analog wie bei Aufgabe (a) ist $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x} = \frac{3}{4}$. Also

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln(\sin 4x)}{\ln(\sin 3x)} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} = 1.$$

(c) Es gelte zunächst $x \to 0$ (und $x > 0$, da sonst $\ln(1+\frac{1}{2x})$ nicht definiert ist).
Für $x > 0$ und $x \to 0$ gilt: $1+\frac{1}{2x} \longrightarrow \infty$. Es liegt also der Fall „$0\cdot\infty$“ vor.
Wegen

$$x \cdot \ln\left(1+\frac{1}{2x}\right) = \frac{\ln(1+\frac{1}{2x})}{\frac{1}{x}}$$

gilt nach den de l'Hospitalschen Regeln:

$$\frac{[\ln(1+\frac{1}{2x})]'}{(\frac{1}{x})'} = \frac{x^2}{(1+\frac{1}{2x}) \cdot 2x^2} = \frac{x}{2x+1} \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} 0$$

und

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x \cdot \ln\left(1+\frac{1}{2x}\right) = 0.$$

Für $x \to \infty$ gilt: $1 + \frac{1}{2x} \longrightarrow 1$ und $\ln\left(1 + \frac{1}{2x}\right) \longrightarrow 0$.
Damit erhält man den Fall „$\infty \cdot 0$“. Analog wie oben gilt:

$$\frac{[\ln(1 + \frac{1}{2x})]'}{(\frac{1}{x})'} = \frac{1}{2(1 + \frac{1}{2x})} \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{1}{2}.$$

Also

$$\lim_{x\to\infty} x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{2x}\right) = \frac{1}{2}.$$

(d) Es ist $\frac{(\ln x)'}{(x)'} = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$. Folglich ist $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.