Kapitel 12
Aufgabensammlung

12.7 Differentialrechnung (1 Veränderliche)

7.22 Geben Sie ein Polynom an, das die Funktion $\ln(1+x)$ im Intervall $[0, \frac{1}{2}]$ bis auf zwei Stellen hinter dem Komma genau annähert. **12/7/23/1**

Lösung zu Aufgabe 7.22 Wir benutzen die Taylorsche Formel für $a = 0$ (vgl. 7/2/9). **12/7/23/3**
Sei $f(x) = \ln(1+x)$. Dann ist

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)!}{(1+x)^n} \quad \text{für } n \geq 1.$$

Weiterhin ist $f(0) = 0$ und $f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1} \cdot (n+1)!$ und

$$R_n(x) = (-1)^{n+2} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{(1+\vartheta x)^{n+1}} \cdot x^{n+1}.$$

Somit erhält man

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= |(-1)^{n+2}| \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{|1+\vartheta x|^{n+1}} \cdot |x|^{n+1} \\ &\leq \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2^n} \qquad \text{(wegen } 0 \leq x \leq \tfrac{1}{2} \text{ und } |1+\vartheta x| \geq 1). \end{aligned}$$

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1) \cdot 2^n} < \frac{1}{100} \iff 100 < (n+1) \cdot 2^n,$$

und diese Ungleichung ist für $n = 4$ erfüllt.

$$p(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{4} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \cdot x^i = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

leistet das Verlangte.